Ex.1 $\quad \bar{z}^2 - 4\,\mathrm{Re}\,z - z = 0$

Poniamo $z = x+iy$. Otteniamo

$$(x-iy)^2 - 4x - (x+iy) = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2ixy - 4x - x - iy = 0$$

Necessariamente, deve essere

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y^2 = 0 & \text{(Parte reale nulla)} \\ -2xy - y = 0 & \text{(Parte immaginaria nulla)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y^2 = 0 \\ y(2x+1) = 0, \end{cases}$$

da cui ricaviamo i due sistemi

$$(1)\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 5x - y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2)\begin{cases} x = -1/2 \\ x^2 - 5x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Da (1) abbiamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Longrightarrow (0,0) \text{ e } (5,0)$$

ossia $\underline{z_1 = 0}$ e $\underline{z_2 = 5}$

Da (2) abbiamo

$$\begin{cases} x = -1/2 \\ \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - y^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y^2 - \frac{11}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(-1/2, \frac{\sqrt{11}}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{11}}{2}\right),$$

ossia

$$\underline{z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i}, \quad \underline{z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i}$$

Abbiamo

$$|z_1| = 0, \quad |z_2| = 5, \quad |z_3| = |z_4| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{11}{4}} = \sqrt{3}$$

e il massimo cercato è chiaramente $\boxed{5}$

Ex. 2 $\quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x^2+x+5}{x}}$

Poiché $\quad f(x) = e^{g(x)} \quad$ con $\quad g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

definita da $\quad g(x) = \dfrac{x^2+x+5}{x} \quad$ e $\quad h(t) = e^t$

è funzione monotona strettamente crescente, i punti di massimo e minimo locale di f sono i punti di massimo e minimo locale di g.

E' sufficiente, dunque, studiare g per determinare x_m e x_M

Abbiamo

$$g'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2+x+5)}{x^2} = \frac{\cancel{2}x^2 \cancel{+x} - \cancel{x^2} \cancel{-x} - 5}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 5}{x^2}.$$

Pertanto

$$g'(x) \geq 0 \qquad \frac{x^2-5}{x^2} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5 \geq 0$$

Dunque

$-\sqrt{5}$ è punto di massimo locale $\Longrightarrow x_M = -\sqrt{5}$

$+\sqrt{5}$ è punto di minimo locale $\Longrightarrow x_m = +\sqrt{5}$

Quindi

$$\sqrt{5}\left(x_M + 2x_m\right) + \ln\left(f(x_m)\cdot f(x_M)\right) =$$

$$= \sqrt{5}\left(-\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\right) + \ln\left[e^{\frac{5+\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}} \cdot e^{\frac{5-\sqrt{5}+5}{-\sqrt{5}}} \right] =$$

$$= 5 + \ln e^{\frac{\cancel{5}+\sqrt{5}+\cancel{5}-\cancel{5}+\sqrt{5}-\cancel{5}}{\sqrt{5}}} = 5 + \ln e^2 = \boxed{7}$$

Ex. 3

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione omogenea associata. È

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica corrispondente è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

la cui radice è $\lambda = 2$ doppia.

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},$$

mentre l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + y_p$$

dove

$$y_p = A x^2 e^{2x}$$

con A costante da determinare. Poiché

$$y_p' = 2Ax e^{2x} + 2Ax^2 e^{2x},$$

$$y_p'' = 2A e^{2x} + 4Ax e^{2x} + 4Ax e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x}$$
$$= 2A e^{2x} + 8Ax e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x},$$

imponendo che y_p sia soluzione dell'equazione completa, abbiamo

$$2A \cancel{e^{2x}} + \cancel{8A x} \cancel{e^{2x}} + \cancel{4Ax^2} \cancel{e^{2x}} - 4(\cancel{2A x} \cancel{e^{2x}} + \cancel{2Ax^2} \cancel{e^{2x}})$$
$$+ \cancel{4Ax^2} \cancel{e^{2x}} = 4\cancel{e^{2x}}$$

da cui otteniamo

$$2A = 4 \implies A = 2.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2x^2 e^{2x}$$

da cui

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + $$
$$+ 4x e^{2x} + 4x^2 e^{2x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

La soluzione del Problema di Cauchy è $y = 2x^2 e^{2x}$.

Quindi $y(1) = 2e^2$ e $\boxed{\dfrac{y(1)}{e^2} = 2}$

Ex. 4

$$I = \int_{\ln 4}^{\ln 16} \frac{12 e^x}{(e^x+4)(e^x+8)}\, dx$$

Possiamo risolvere per sostituzione, ponendo

$$e^x = t,$$

da cui

$$e^x\, dx = dt$$

$$x = \ln 4 \implies t = e^{\ln 4} = 4$$

$$x = \ln 16 \implies t = e^{\ln 16} = 16.$$

Pertanto, abbiamo

$$I = \int_4^{16} \frac{12}{(t+4)(t+8)}\, dt = 12 \int_4^{16} \left(\frac{A}{t+4} + \frac{B}{t+8} \right) dt$$

dove

$$A = \lim_{t \to -4} \frac{1}{t+8}, \qquad B = \lim_{t \to -8} \frac{1}{t+4}.$$

Facilmente, otteniamo $\quad A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}.$

Pertanto

$$I = 12 \int_4^{16} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{t+4} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+8} \right) dt$$

$$= \frac{12}{4} \left[\ln \left| \frac{t+4}{t+8} \right| \right]_4^{16} = 3 \left(\ln \frac{20}{24} - \ln \frac{8}{12} \right)$$

$$= 3 \ln \left(\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{24}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} \right) = 3 \ln \frac{5}{4}.$$

Quindi

$$\frac{4I}{\ln \frac{5}{4}} = \frac{4 \cdot 3 \ln \frac{5}{4}}{\ln \frac{5}{4}} = \boxed{12}.$$

Ex. 5 $\displaystyle\lim_{x\to 5} 3\left(5+\arctan(5-x)\right)\cdot\frac{\sinh(x-5)+(5-x)\cos(x-5)}{[\sin(5-x)]^3}$

Se poniamo $x-5=t$, otteniamo sostituendo

$$\lim_{t\to 0} 3(5+\arctan(-t))\cdot\frac{\sinh t - t\cos t}{[\sin(-t)]^3}.$$

Tenendo conto che sia la funzione arctan, sia la funzione sin sono dispari, abbiamo

$$\lim_{t\to 0} 3(5-\arctan t)\cdot\frac{\sinh t - t\cos t}{-\sin^3 t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} 3(5-\arctan t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t - t\cos t}{-\sin^3 t}$$

$$= 15\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t - t\cos t}{-\sin^3 t}.$$

Utilizzando gli sviluppi notevoli, abbiamo

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sinh t - t\cos t}{-\sin^3 t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t} + \frac{t^3}{6} + o(t^4) - t\left[\cancel{1} - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right]}{-t^3 + o(t^6)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) + o(t^4)}{-t^3 + o(t^6)}$$

$$= -\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right) = -\frac{2}{3}$$

Pertanto, il limite complessivo è dato da

$$\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \left(-\frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) = \boxed{-10}$$

Ex. 6 Abbiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^{10}+1} \ln(1+a^n)$

Posto

$$c_n = \frac{3^n}{n^{10}+1} \ln(1+a^n)$$

osserviamo, innanzi tutto, che

$$c_n \sim \frac{3^n}{n^{10}} \ln(1+a^n)$$

Il comportamento di $\boxed{\ln(1+a^n)}$ dipende da $a > 0$.

Abbiamo

$a > 1$ $\quad \ln(1+a^n) \sim \ln a^n = n \ln a$

$a = 1$ $\quad \ln(1+a^n) = \ln(1+1) = \ln 2$

$a < 1$ $\quad \ln(1+a^n) \sim a^n$

Pertanto

$\boxed{a > 1}$ $\quad c_n \sim \frac{3^n}{n^{10}} \cdot n \ln a = \frac{3^n}{n^9} \ln a$ e

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

Poiché la CN di convergenza è violata, concludiamo che per $a > 1$, la serie <u>non</u> converge.

$\boxed{a=1}$ $\quad c_n \sim \frac{3^n}{n^{10}} \ln 2$;

analogamente a sopra, abbiamo che $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ e la serie <u>non</u> converge.

Infine, se $\boxed{0 < a < 1}$, abbiamo

$$c_n \sim \frac{3^n}{n^{10}} \cdot a^n = \frac{(3a)^n}{n^{10}}$$

È facile vedere che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3a)^n}{n^{10}}$ converge se

$3a \leq 1$, mentre non converge se $3a > 1$.

Pertanto, concludiamo che la serie converge se

$$0 < a \leq \frac{1}{3}$$

Quindi, $\sup A = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{\sup A} = \frac{1}{1/3} = \boxed{3}$

Ex. 7 Data $f : [a,b] \to [c,d]$ derivabile e strettamente monotona, è chiaro che f è invertibile e $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ è continua e strettamente monotona. Tuttavia, non è detto che sia necessariamente decrescente; pertanto b) non è in generale vera. Dal Teorema di derivazione della funzione inversa, posto $y_0 = f(x_0)$, sappiamo che se $f'(x_0) \neq 0$, allora

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dunque la risposta corretta è c)

Ex. 8 Posto $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, abbiamo

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to c$$

Per definizione di o, abbiamo

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

quindi d) è falsa. Anche la risposta a) non ha senso, dal momento che non abbiamo alcuna informazione sul comportamento di f/g nell'intorno di $x = 0$.

Osserviamo che, poiché $c \neq 0$, abbiamo

$$x\, g(x) \sim c\, g(x)$$

nell'intorno di $x = c$ e quindi, per definizione di o piccolo,

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{per} \quad x \to c$$

è equivalente a $\quad f(x) = o(x\, g(x))$

Dunque la risposta corretta è c)

Ex. 9 Sappiamo che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Se consideriamo

$$a_n = e^{-n}$$

abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$$

ma

$$\lim_{n\to\infty} n \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln e^{-n} = \lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$$

quindi <u>a) è falsa.</u>

Inoltre, con la medesima successione, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (e^{-n})^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-1} = e^{-1} \neq 0$$

quindi anche <u>d) è falsa.</u>

Se consideriamo

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

è chiaro che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

ma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}^{\,1}}{(n+1)\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \neq 1$$

quindi, anche <u>c) è falsa</u>.

Mostriamo direttamente perché b) è vera.

Poiché $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, questo implica che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \text{ t.c. } \forall n > N_\varepsilon \quad |a_n| < \varepsilon$$

Possiamo assumere senza difficoltà che $N_\varepsilon > 1$.

In particolare, se prendiamo $\varepsilon < 1$, è chiaro che da $|a_n| < \varepsilon$ per $n > N_\varepsilon$ segue per gli stessi n $|a_n^n| = |a_n|^n < |a_n| < \varepsilon$

cioè, proprio

$$\lim_{n \to \infty} a_n^n = 0.$$

Ex. 10, $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2

Il Polinomio di Mc-Laurin è dato da

$$P_2(x; 0) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} x^2 .$$

Poiché sappiamo che

$$P_2(x; 0) = 1 + x + x^2,$$

concludiamo che $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$.

Passando a $g(x) = [f(x)]^2$, è chiaro che è anch'esso di classe C^2. Pertanto, il polinomio di Mc-Laurin di ordine due è ben definito e la sua espressione è

$$Q_2(x;0) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2$$

Abbiamo $g(0) = [f(0)]^2 = 1$. Inoltre

$$g'(x) = \left([f(x)]^2\right)' = 2f(x)f'(x)$$

$$g'(0) = 2f(0)\cdot f'(0) = 2$$

$$g''(x) = \left(2f(x)\cdot f'(x)\right)' = 2\left(f'(x)\right)^2 + 2f(x)f''(x)$$

$$g''(0) = 2\left(f'(0)\right)^2 + 2f(0)\cdot f''(0) = 2 + 2\cdot 2 = 6$$

Quindi

$$Q_2(x) = 1 + 2x + \frac{6}{2}x^2 = 1 + 2x + 3x^2$$

che è proprio la risposta b)

Ex. 11 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una funzione continua e tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

Poiché f è continua su $\mathbb{R}$, abbiamo che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

e dunque c) è falsa.

Possiamo riscrivere il limite come

$$\frac{f(x) - 3\sin x}{x} = \frac{1}{2} + o(1) \qquad \text{per } x \to 0$$

cioè

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3\sin x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

ed anche, tenendo conto del comportamento di $\sin x$

per $x \to 0$,

$$f(x) = \frac{7}{2}x + o(x)$$

Da qui ricaviamo immediatamente che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{7}{2}x + o(x) = 0$$

Quindi, per la continuità di f, $f(0) = 0$ e la risposta a) è falsa.

Poiché $f(0) = 0$, possiamo riscrivere il limite dato come

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - 3\sin x}{x} = \frac{1}{2},$$

cioè anche

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \left(\lim_{x \to 0} 3\,\frac{\sin x}{x} \right) + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{7}{2}$$

Poiché a sinistra abbiamo il limite del rapporto incrementale in $x = 0$, possiamo concludere che f è derivabile in $x = 0$ (dunque b) è falsa) e $f'(0) = \frac{7}{2}$

Quindi, la risposta corretta è d).

Ex. 12 Abbiamo $F(x) = \int_x^0 f(t)\,dt$, dove $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è funzione continua e positiva.

Per le proprietà dell'integrale, possiamo riscrivere

$$F(x) = -\int_0^x f(t)\,dt .$$

Poiché f è continua, possiamo applicare il Teorema fondamentale del Calcolo e concludere che

$$F'(x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, concludiamo che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F'(x) < 0$$

ossia F è decrescente in $\mathbb{R}$. Quindi la risposta corretta è c).