Analisi 1

Compito del 26/2/26

$\boxed{A1}$ $\quad f(x) = e^{\frac{x+2}{x-2}}$ $\quad$ Calcolare $P_2(x,4)$

$$P_2(x,4) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2$$

$$f(4) = e^{\frac{6}{2}} = e^3$$

$$f'(x) = e^{\frac{x+2}{x-2}} \left\{ \frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2} \right\} = e^{\frac{x+2}{x-2}} \cdot \frac{(-4)}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = e^3 \cdot (-1)$$

$$f''(x) = e^{\frac{x+2}{x-2}} \left\{ \frac{+8(x-2)}{(x-2)^4} + \frac{(-4)^2}{(x-2)^4} \right\}$$

$$f''(4) = e^3 \left\{ \frac{16}{16} + \frac{16}{16} \right\} = 2\, e^3$$

$$P_2(x,4) = e^3 \left\{ 1 - (x-4) + (x-4)^2 \right\}$$

A2)

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{2+x^2}\, y(x) + 2x \\ y(0) = 3\sqrt{2} + 4 \end{cases}$$

$$A(x) = \int \frac{x}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(2+x^2) \; (+c)$$

$$e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\log(2+x^2)} = e^{\log(2+x^2)^{-1/2}} = (2+x^2)^{-1/2}$$

Moltiplico l'eq. per $e^{-A(x)}$

$$\underbrace{(2+x^2)^{-1/2}\left\{y'(x) - \frac{x}{2+x^2}\,y(x)\right\}}_{\parallel} = (2+x^2)^{-1/2}\cdot 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot(2+x^2)^{-1/2}\right)$$

Integro fra 0 e x:

$$y(x)\cdot(2+x^2)^{-1/2} - \underbrace{y(0)}_{\substack{\parallel \\ (3\sqrt{2}+4)}}\cdot 2^{-1/2} = \int_0^x \frac{2t}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$$

quindi

$$y(x)\,(2+x^2)^{-1/2} = 3+2\sqrt{2} + 2(2+t^2)^{1/2}\Big|_0^x$$

$$= 3+\cancel{2\sqrt{2}} + 2(2+x^2)^{1/2} - \cancel{2\sqrt{2}}$$

Rimoltiplico tutto per $(2+x^2)^{1/2}$ e ho

$$\boxed{y(x) = 3(2+x^2)^{1/2} + 2(2+x^2)}$$

A3)

PARTI $F = \frac{-\cos(e^{3x})}{3}$ $F' = e^{3x}\sin(e^{3x})$

$$\int e^{6x}\sin(e^{3x})\,dx =$$

$G = e^{3x}$ $G' = 3e^{3x}$

$$= -\frac{1}{3}e^{3x}\cos(e^{3x}) + \int e^{3x}\cos(e^{3x})\,dx =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{3}e^{3x}\cos(e^{3x}) + \frac{\sin(e^{3x})}{3}} \left(+C\right)$$

scelta

0

A4 $f(x) = 3x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tanh\left(\frac{2}{x^2}\right) + \frac{\ln(1+2x^5)}{\sinh(3x^\alpha)}$

$\alpha > 0$

$x > 0$

$f(0) = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 0^+} \boxed{\underbrace{\underbrace{3x^\alpha}_{\downarrow\, 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{limitato}} \underbrace{\tanh\left(\frac{2}{x^2}\right)}_{\to 1}} + \frac{\ln(1+2x^5)}{\sinh(3x^\alpha)}$$

$\ln(1+2x^5) \sim 2x^5$

$\sinh(3x^\alpha) \sim 3x^\alpha$

$\downarrow$ 0

$\frac{2}{3} x^{5-\alpha}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3} x^{5-\alpha} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } \alpha = 5 \\ 0 & \text{se } 0<\alpha<5 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 5 \end{cases}$$

Soluzione: $\boxed{\alpha = 5}$

A5)

$$\sum \frac{\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(3n)\right]^{\alpha}\left(e^{1/n^2}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{5}{n^5}\right)}$$

Confronto asintotico per $n \to +\infty$

$$\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(3n)\right]^{\alpha}=\left[\arctan\frac{1}{3n}\right]^{\alpha}\sim\frac{1}{(3n)^{\alpha}}$$

$$e^{1/n^2}-1 \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\ln\left(1+\frac{5}{n^5}\right) \sim \frac{5}{n^5}$$

Dunque studio convergenza (trascurando le costanti) di

$$\sum \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^2}}{1/n^5}=\sum\frac{1}{n^{\alpha+2-5}}<+\infty$$

$$\iff \alpha+2-5>1 \iff \boxed{\alpha>4}$$

$\underline{A(6)}$ $f(x) = (x^2-6)e^{-2|x|}$ PARI

quindi lo studio solo per $x>0$.

$f(0) = -6$

Studio derivata in $(0,+\infty)$

$$f'(x) = e^{-2x}\left\{2x - 2(x^2-6)\right\} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow -2x^2+2x+12 \geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$x^2 - x - 6 \leq 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$\frac{6}{2} = 3$ $\qquad$ $-\frac{4}{2} = -2$

NON AMMISS.

$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow$

$x \in (0,3)$

$$0 \nearrow 3 \searrow$$

Quindi f cresce in $(0,3)$
decresce in $(3,+\infty)$.

Controlliamo
$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-6)\, e^{-2x} = 0$$

Dunque $x_{M_1}=3$ è punto di MAX (globale)

(e quindi per simmetria PARI
anche $x_{M_2}=-3$ è pto di MAX)

$x_m=0$ è punto di MIN (globale)

$$(=f(-3))$$
$$\text{MAX} = f(3) = 3e^{-6}$$

$$\text{MIN} = f(0) = -6$$

A7)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt[3]{1+x} + x^2\arccos(3x) - \sqrt{1-x} + \arcsin(7x)}{\sinh(x^{1/3}) + \arctan(x^{3/2}) - \sin(x^{1/3})}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{1} + \frac{1}{3}x + o(x) + x^2 + o(x^2) \cancel{-1} + \frac{1}{2}x + o(x) + 7x + o(x)}{\cancel{x^{1/3}} + \frac{1}{6}x + o(x) + x^{3/2} + o(x^{3/2}) \cancel{-x^{1/3}} + \frac{1}{6}x + o(x)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + 7x + o(x)}{\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x + o(x)}$$

$$= 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 7\right)$$

$\boxed{A8}$ $(z\bar{z} + |\mathrm{Im}\, z| + 6)(z^2 + 6iz + 16) = 0$

Perché questa sia verificata, una delle parentesi deve annullarsi.

Ma $z\bar{z} = |z|^2$ che è un numero reale ≥ 0

$$\underbrace{|z|^2}_{\geq 0} + \underbrace{|\mathrm{Im}\, z|}_{\geq 0} + 6 \geq 6 \text{ sempre}$$

quindi non si annulla mai!

$$z^2 + 6iz + 16 = 0 \iff$$

$$z_{1,2} = -3i \pm \sqrt{\underbrace{(3i)^2}_{=-9} - 16} =$$

$$= -3i \pm 5i = \begin{cases} \nearrow -8i \\ \searrow 2i \end{cases}$$

Soluzioni $z_1 = -8i$

$z_2 = 2i$

$$W_0 = \frac{6+8i}{2+6i} = \frac{(6+8i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)} =$$

$$= \frac{12+48+16i-36i}{40} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

B1) Se $a_n, b_n \leq 0$ allora

$$\sum a_n = -\infty \qquad \sum b_n = -\infty$$

e di conseguenza $\sum a_n + b_n = -\infty$

Risposta Corretta $\boxed{A}$

Controesempio a $\boxed{B}$ $a_n = n \quad b_n = \frac{1}{n}$

Controes. a $\boxed{C}$ $a_n = b_n = \frac{1}{n}$

Controes a $\boxed{D}$ $a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = -\frac{1}{n}$

$\boxed{B2}$ Per il teorema della media integrale

$$\inf_{[-1,1]} f \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq \sup_{[-1,1]} f$$

$$\inf_{[-1,1]} f \geq -1 \qquad \sup_{[-1,1]} f \leq 1$$

quindi la risposta corretta è $\boxed{D}$

$\boxed{B3}$ $f(t) = o(t)$ per $t \to 0$

se $x \to +\infty$ allora $\frac{1}{x^2} \to 0$

e $\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2} \to 0$

Dunque $f\left(\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = o\left(\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$

risposta corretta $\boxed{D}$

B4) Siccome g è PARI

$$g(a) = g(-a)$$ e possiamo

applicare il Thm Rolle quindi

$$\exists\, c \in (-a, a) \text{ t.c. } g'(c) = 0$$

Risposta corretta $\boxed{D}$

B5 $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ vuol dire

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (1, 1+\delta)$

vale $\underbrace{|f(x) - 1| \leq \varepsilon}_{\text{ovvero}}$

$$1 - \varepsilon \leq f(x) \leq 1 + \varepsilon$$

quindi risposta corretta $\boxed{C}$

$\boxed{B6}$ Siccome l'immagine di arctan è $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

la funzione

$$g(x) = \arctan f(x) \text{ è LIMITATA}$$

Risposta corretta $\boxed{B}$

$\boxed{B7}$ $f(x) = 1 + 2x + 3x^3 + o(x^4)$

per $x \to 0$

vuol dire che

$$P_4(x, 0) = 1 + 2x + 3x^3.$$

Risposta corretta $\boxed{C}$

$\boxed{B8}$ (a_n) successione di numeri reali, $a_n > 0 \ \forall n$

$\Rightarrow \inf (a_n) \geq 0$.

Risposta esatta $\boxed{A}$

Controesempio a $\boxed{B}$ $a_n = 1 + (-1)^n$

Controes a $\boxed{C}$ $a_n = \frac{1}{n}$

e $\boxed{D}$