$\boxed{A1}$ Ricorrendo agli sviluppi notevoli si ha

$$\sinh(t) - \sin t = t + \frac{t^3}{6} - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad \text{per } t \to 0$$

ossia
$$\sinh t - \sin t \sim \frac{1}{3} t^3 \quad \text{per } t \to 0$$

Dunque
$$\sinh\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) - \sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) \sim \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right)^3}_{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left(\sinh\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) - \sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right)\right)^\alpha \sim \left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}\right)^\alpha \quad \text{per } n \to +\infty$$

Ricostruendo il termine generale della serie avremo

$$n\left(\sinh\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) - \sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right)\right)^\alpha \sim c \cdot \frac{n}{n^{\frac{3}{2}\alpha}} = c \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha - 1}}$$

per $n \to +\infty$, dove $c = \left(\frac{8}{3}\right)^\alpha$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha - 1}}$ converge $\iff \frac{3}{2}\alpha - 1 > 1$

$\iff \alpha > \frac{4}{3}$

Anche la serie data converge se e solo se $\alpha > \frac{4}{3}$, grazie al CR. del confr. asintotico.

$\boxed{A2}$ Usiamo la definizione:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = tg\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\arcsin(2x))} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{-2\cos(\arcsin(2x))\underbrace{\sin(\arcsin(2x))}_{=2x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-4x^2}}} \cdot 2 \cdot \cancel{\sqrt{1-4x^2}} + \cos^2(\arcsin(2x)) \cdot \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{\left[\cos^2(\arcsin(2x)) \sqrt{1-4x^2}\right]^2}$$

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \frac{-2\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{2}{4} \cdot 2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}}{\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}$$

$$= -2 \frac{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{64}{9}\sqrt{3}$$

$$P(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{16}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{4}\right) + \frac{32}{9}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$$

$\boxed{A3}$ Usando la stima asintotica

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad \text{per } x \to 0$$

troviamo

$$\sqrt[4]{1+\frac{8}{n}} - 1 \sim \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{n} = \frac{2}{n} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}} - 1 \sim -\frac{1}{3}\frac{4}{n} = -\frac{4}{3n} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi

$$\left[\sqrt[4]{1+\frac{8}{n}} - 1\right]\left[\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}} - 1\right] \sim -\frac{8}{3n^2} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Da $\qquad \ln(1+x) \sim x \quad$ per $x \to 0$

si ha $\qquad \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n^2} \quad$ per $n \to +\infty$

In definitiva

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{8}{3n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{4}{3}$$

$$\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \sim \frac{3}{x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

$$1-\cos\left(\frac{e^{2/x}}{x}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Perciò $\quad L_2 = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 \cdot \frac{3}{x}}{x^3 \cdot \frac{1}{2x^2}} = 6$

$\boxed{A4}$ $|x|$ è pari $\Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$

$\sin^{1001}(x)$ è dispari $\Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} \sin^{1001}(x)\,dx = 0$

$$\int_1^2 e^x \frac{\operatorname{arctg}^8(e^x)}{1+e^{2x}}\,dx \underset{\substack{t=e^x\\ dt=e^x dx}}{=} \int_e^{e^2} \frac{\operatorname{arctg}^8(t)}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{1}{1+t^2}(\operatorname{arctg} t)^8\,dt = \left.\frac{(\operatorname{arctg} t)^9}{9}\right|_e^{e^2} = \frac{\operatorname{arctg}^9(e^2) - \operatorname{arctg}^9(e)}{9}$$

La somma degli integrali è pari a :

$$\frac{\operatorname{arctg}^9(e^2) - \operatorname{arctg}^9(e)}{9} + 1$$

$\boxed{A5}$ f è derivabile in $(0,+\infty)$ e

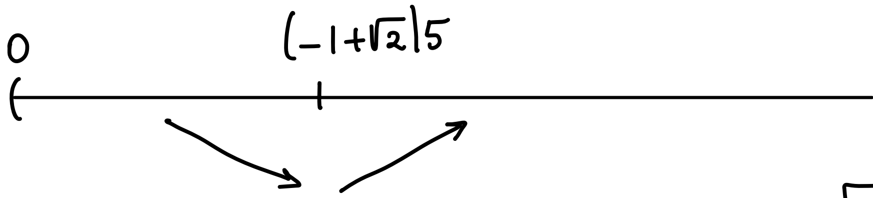
$$f'(x) = e^{\sqrt{\frac{x+10}{x}}} + x\, e^{\sqrt{\frac{x+10}{x}}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x+10}{x}\right)^{-1/2} \frac{x-x-10}{x^2} =$$

$$= e^{\sqrt{\frac{x+10}{x}}}\left[1 - 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+10}}\right] \qquad x>0$$

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+10}} \geq 0$$

$$\iff \sqrt{x}\,\sqrt{x+10} \geq 5 \iff x^2+10x-25 \geq 0$$

$$\iff x \geq (-1+\sqrt{2})5$$



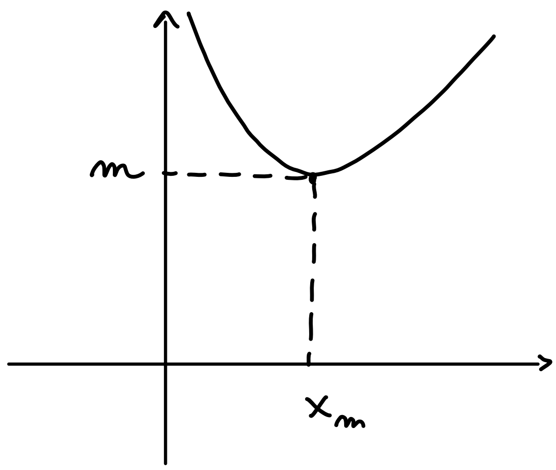
$$x_m = 5(\sqrt{2}-1) \quad e \quad m = f(x_m) = 5(\sqrt{2}-1)\, e^{\sqrt{\frac{5(\sqrt{2}-1)+10}{5(\sqrt{2}-1)}}} =$$

$$= 5(\sqrt{2}-1)\, e^{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}} = 5(\sqrt{2}-1)\, e^{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}}$$

$$= 5(\sqrt{2}-1)\, e^{\sqrt{2}+1}$$

Siccome $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

il grafico di f è



L'equazione $f(x) = \lambda$ ammette due radici distinte

se $\lambda > m = 5(\sqrt{2}-1)\, e^{\sqrt{2}+1}$

$\boxed{A6}$

$$\frac{(z-4i)^2}{(z+2i)} \underset{\substack{\uparrow \\ z=2+2i}}{=} \frac{(2-2i)^2}{2+4i} = \frac{-8i\,(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{-32-16i}{20}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(z-4i)^2}{z+2i}\right] = -\frac{32}{20} = -8/5$$

$$|z|^2 = z\cdot\bar{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{|z|^2}{z} - \frac{6\bar{z}}{z^8} = \bar{z} - \frac{6\bar{z}}{z^8}$$

L'eq. da risolvere è pertanto

$$\underset{\neq 0}{\bar{z}}\left(1-\frac{6}{z^8}\right) = 0$$

altrimenti l'eq. perde significato

ossia $\qquad z^8 = 6$

Usando la formula per le radici n-sime:

$$z_k = \sqrt[8]{6}\, e^{2k\pi i/8} \qquad k=0,1,\dots,7$$

$$= \sqrt[8]{6}\, e^{\frac{k\pi}{4}i}$$

$\boxed{A7}$ Usando la definizione

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)=0}}{=} \frac{\arcsin\left(\frac{|2x|}{|2x|+1}\right)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \arcsin t \sim t \text{ per } t\to 0}}{=} \frac{\frac{|2x|}{|2x|+1}}{x} = \frac{2|x|}{(2|x|+1)x} \quad \text{per } x\to 0$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{2x+1} = 2 \qquad \text{derivata destra}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{-2x+1} = -2 \quad \text{derivata sinistra}$$

$\boxed{A8}$ Risolviamo l'eq. omogenea associata

$$u'' - 8u' + 12u = 0$$

L'eq. caratteristica $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$ ammette radici

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 6$$

L'integrale generale dell'omogenea è $u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{6t}$
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Per la soluzione particolare dell'eq. completa cerchiamo

$$u_p(t) = A t e^{6t}$$

6 è soluz. dell'eq. caratt. con molteplicità 1

Imponendo che u_p sia soluzione

$$u_p' = A e^{6t} + 6At e^{6t}$$

$$u_p'' = 12 A e^{6t} + 36At e^{6t}$$

$$u_p'' - 8u_p' + 12u_p = e^{6t} \iff$$

$$12 A e^{6t} + 36\cancel{At}e^{6t} - 8Ae^{6t} - 48\cancel{At}e^{6t} + 12\cancel{At}e^{6t} = e^{6t}$$

$$\iff \quad 4A = 1 \iff A = 1/4$$

Integrale generale eq. completa : $u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{6t} + \frac{1}{4} t e^{6t}$

Imponiamo le cond. iniziali :

$u(0) = 0 \iff \underline{c_1 + c_2 = 0}$

$u'(t) = 2c_1 e^{2t} + 6c_2 e^{6t} + \frac{1}{4} e^{6t} + \frac{3}{2} t e^{6t}$

$u'(0) = \frac{1}{2} \iff \underline{2c_1 + 6c_2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 4c_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{16} \\ c_2 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

La soluzione del probl. di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{1}{16} e^{2t} + \frac{1}{16} e^{6t} + \frac{1}{4} t e^{6t}$$

$\boxed{B1}$ $\boxed{D}$ Dato che $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ per $x \to c$

applicando il T. di De L'Hôpital

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to c]{} 1 \qquad \text{essendo } f'(x) \sim g'(x) \text{ per } x \to c$$

Pertanto anche $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ossia $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x \\ g(x) &= x \\ c &= 0 \end{aligned}\right\} \text{controesempio alle altre risposte}$$

$\boxed{B2}$ $\boxed{B}$ Se esistesse $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(a_n) = \ell$

allora anche $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(a_n)) = a_n$ avrebbe limite,

ma ciò non è possibile.

$a_n = (-1)^n n$ è un controesempio alle altre risposte

$\boxed{B3}$ $\boxed{D}$ $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ in quanto n e n^2 sono

simultaneamente pari o dispari.

La successione $(f(n^2))$ è infinitesima e decrescente

per le ipotesi su f. Quindi

$$\sum (-1)^{n^2} f(n^2) = \sum (-1)^n f(n^2)$$ converge per il CR. di Leibnitz

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è un controesempio alle altre risposte

$\boxed{B4}$ $\boxed{C}$ $f' > 0 \Rightarrow f$ strett. cresc. $\Rightarrow f^{-1}$ strett. cresc.

Dal Teorema di derivazione della f. inversa

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$y = f(x)$
$x = f^{-1}(y)$

f' cresc e f^{-1} cresc $\Rightarrow$ $f'(f^{-1}(y))$ crescente

$\overset{\Longrightarrow}{f'>0}$ $\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ è decrescente cioè $(f^{-1})'$ è decrescente e ciò equivale a f^{-1} concava.

$f(x) = e^x$ è un controesempio alle altre risposte

$\boxed{B5}$ $\boxed{D}$ $\lim_{x \to 0} \arctan(\ln|x|) = \frac{\pi}{2} = f(0) \implies f$ è continua in 0

Se $x_0 \neq 0$, f è continua in x_0 grazie al teorema di continuità della funz. composta

$\boxed{B6}$ $\boxed{A}$ Usando lo sviluppo di $\operatorname{Sh}(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^4) \quad t \to 0$

con $t = 5x^2$: $\operatorname{Sh}(5x^2) = 5x^2 + \frac{125 x^6}{6} + o(x^8) \quad x \to 0$

da cui $5x^2 + \frac{125}{6} x^6$

$\boxed{B7}$ $\boxed{B}$ in quanto

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \iff \forall (x_n)$ successione con $\lim_{n \to +\infty} x_n = 2$

e $x_n \neq 2$ definitivamente

risulta $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 4$

$\boxed{B8}$ $\boxed{C}$ Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$F'(x) = \sin(2x) \cdot 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Perciò F' ha infiniti zeri