

PART A

① $f(x) = 2 \tan(\pi e^{-2x})$ $x_0 = \ln 2$

L'equazione della retta tangente è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Abbiamo

$$f(x) = 2 \tan(\pi e^{-2x})$$

$$f'(x) = 2 \left[1 + \tan^2(\pi e^{-2x}) \right] \cdot (-2\pi e^{-2x})$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= 2 \tan(\pi e^{-2 \ln 2}) = 2 \tan(\pi e^{-\ln 4}) \\ &= 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(\ln 2) &= 2 \left[1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} \right] (-2\pi e^{-2 \ln 2}) \\ &= 2(1+1) \left(-2\pi \frac{1}{4} \right) = \cancel{2} \cdot \cancel{2} \left(-2 \frac{\pi}{\cancel{4}} \right) \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

Quindi

$$r_{tg}: y - 2 = -2\pi(x - \ln 2)$$

② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 e^{3x - x^2}$

Osserviamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$

Quindi, sicuramente, $x_0 = 0$ è punto di minimo locale e assoluto e $\min_{\text{ass}} f = 0$.

Abbiamo, inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x e^{3x-x^2} + x^2 e^{3x-x^2} (3-2x) \\ &= x e^{3x-x^2} (2 + 3x - 2x^2) \end{aligned}$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad x(2 + 3x - 2x^2) \geq 0$$

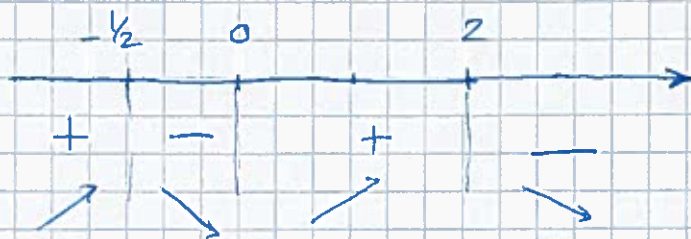
cioè

$$x(2x^2 - 3x - 2) \leq 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} = 2 \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Passando al segno di f' , abbiamo



Quindi

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0$$

punto di massimo relativo

punto di minimo relativo e assoluto
(come già scritto sopra)

$x_2 = 2$ punto di massimo relativo.

Inoltre, sostituendo abbiamo

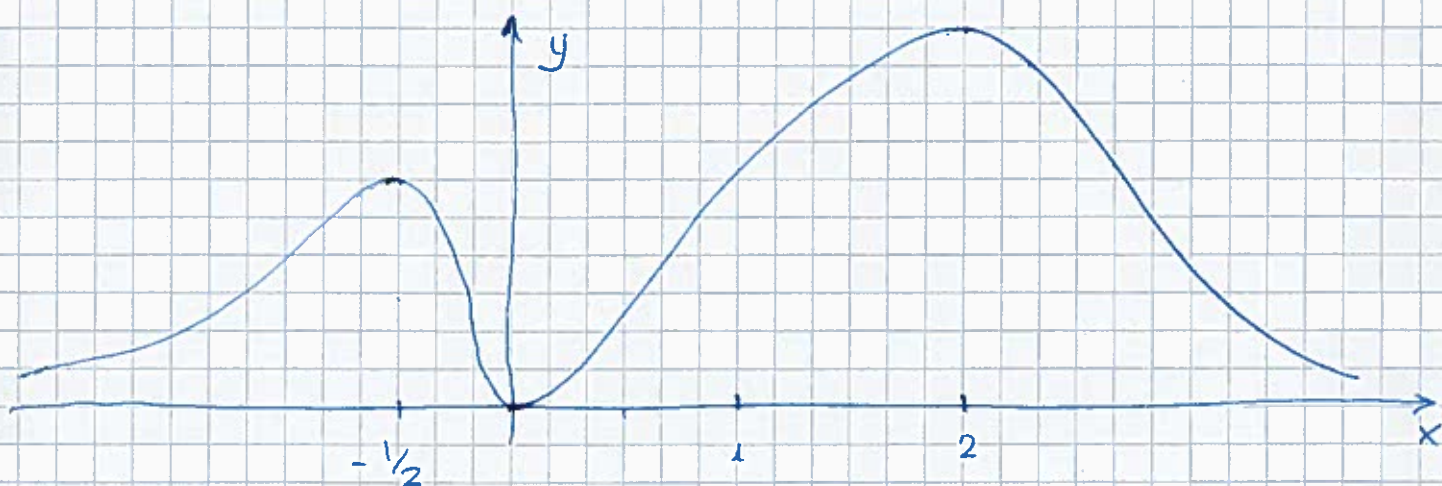
$$f(x_2) = f(2) = 2^2 e^{6-4} = 2e^2$$

$$f(x_1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} e^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} e^{5/4}$$

Poiché $\frac{1}{4} e^{5/4} < 2e^2$, concludiamo che

$$M_{\text{ass}} = 2e^2$$

$m_{\text{ass}} = 0$ (come già detto sopra)



[Grafico qualitativo]

③ Poniamo $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$.
Sostituendo, otteniamo

$$(x - iy)^2 + 6y + 2i(x - iy) + (x + iy)(x - iy) = 12$$

$$\cancel{x^2 - y^2} - 2ixy + 6y + 2ix + 2y + \cancel{x^2 + y^2} = 12$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 6y + 2y + x^2 = 12 \\ -2xy + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 8y = 12 \\ -2x(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{2}i}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 + 8 = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 = 12 - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{2} + i}$$

④

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{2n^3 + n^2} \right)^{3n^3 + \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n^3} \right)^{3n^3} \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n^3} \right)^{-\frac{n^3}{4}} \right]^{-3} = e^{-12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(8x^2) + e^{x^3} - \cos x}{\sin x - \ln(1+x)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2 + \frac{8^3}{6}x^6 + O(x^6) + 1 + x^3 + O(x^3) - 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^2)}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^3) - x + \frac{x^2}{2} + O(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}(1 + 16) + O(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^2)} = 17 \end{aligned}$$

$$(5) \quad y' = -5y + 2 \sinh 4x$$

Applicando la formula risolutiva, abbiamo

$$y = e^{-\int 5 dx} \left[C + \int 2 \sinh(4x) e^{\int 5 dx} dx \right]$$

$$y = e^{-5x} \left[C + \int \cancel{2} \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{\cancel{2}} e^{5x} dx \right]$$

$$y = e^{-5x} \left[C + \int (e^{9x} - e^x) dx \right]$$

$$y = e^{-5x} \left[C + \frac{1}{9} e^{9x} - e^x \right]$$

$$y = C e^{-5x} + \frac{1}{9} e^{4x} - e^{-4x}$$

$$(6) \quad J = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{\ln(2+e^x)}{2+e^x} e^x dx$$

Effettuiamo la sostituzione

$$2 + e^x = t \quad \Rightarrow \quad e^x dx = dt$$

$$x = \ln 3 \quad \Rightarrow \quad t = 2 + e^{\ln 3} = 2 + 3 = 5$$

$$x = \ln 4 \quad \Rightarrow \quad t = 2 + e^{\ln 4} = 2 + 4 = 6$$

Pertanto, otteniamo

$$J = \int_5^6 \frac{\ln t}{t} dt = \left[\ln \ln t \right]_5^6$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln t \right]^2 \Big|_5^6 = \frac{1}{2} (\ln^2 6) - \frac{1}{2} (\ln^2 5)$$

$$(7) \quad I_1 = \int_2^3 \frac{(1 - e^{x-4})^{2\alpha}}{\left[\ln[1+(x-2)] \right]^\alpha \left[\sin(4-x) \right]^{2-2\alpha}}$$

Osserviamo che abbiamo la singolarità dell'integrando in $x=2$. Inoltre

$$f(x) \sim \frac{(1 - e^{-2})^{2\alpha}}{(\sin 2)^{2-2\alpha}} \cdot \frac{1}{(x-2)^\alpha} \quad \text{per } x \rightarrow 2^+$$

Pertanto, l'integrale improprio converge se $\alpha < 1$

D'altro canto, abbiamo

$$I_2 = \int_3^4 \frac{(1 - e^{x-4})^{2\alpha}}{\left[\ln(1+(x-2)) \right]^\alpha \left[\sin(4-x) \right]^{2-2\alpha}}$$

In questo secondo caso, la singolarità dell'integrando è in $x=4$. Risolve

$$f(x) \sim \frac{1}{(\ln 3)^\alpha} \frac{(4-x)^{2\alpha}}{(4-x)^{2-2\alpha}} = \frac{1}{(\ln 3)^\alpha} \frac{1}{(4-x)^{2-4\alpha}}$$

Pertanto, l'integrale converge se

$$2 - 4\alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha > 1$$

$$\alpha > \frac{1}{4}$$

Concludiamo che entrambi gli integrali convergono se $\frac{1}{4} < \alpha < 1$

$$(8) \quad f(x) = e^{9+x^2} (1+x)^{1/3}$$

Abbiamo, usando gli sviluppi noti di McLaurin (cioè centrati in $x_0=0$),

$$e^{9+x^2} = e^9 \cdot e^{x^2} = e^9 (1 + x^2 + o(x^2)) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1} x + \binom{1/3}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1/3}{1} x + \frac{1/3 \cdot (1/3 - 1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{9} x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Quindi

$$f(x) = e^9 (1 + x^2 + o(x^2)) \left(1 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{9} x^2 + o(x^2) \right)$$

$$= e^9 \left[1 + x^2 + o(x^2) + \frac{1}{3} x + o(x^2) - \frac{1}{9} x^2 + o(x^2) \right]$$

$$= e^9 \left(1 + \frac{1}{3} x + \frac{8}{9} x^2 + o(x^2) \right) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Pertanto,

$$P_2(x;0) = e^9 \left(1 + \frac{1}{3} x + \frac{8}{9} x^2 \right)$$

PARTI B

① $a_n > 0 \quad \forall n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

$b_n > 0 \quad \forall n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$

B) Consideriamo $a_n = 2^n$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

Abbiamo $a_n b_n = \frac{2^n}{n^2}$ e

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ diverge. Quindi, B) è

in generale falsa

C) Consideriamo $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

Abbiamo $a_n b_n = \frac{1}{n^3}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

che converge. Quindi, C) è falsa.

A) Se prendiamo lo stesso esempio di B), abbiamo

$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{n^2 2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$

che converge. Quindi, A) è falsa in generale

Mostriamo direttamente che D) è vera.

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, per la CN di convergenza, preso $\varepsilon = 1/2 \exists N_1$ t.c. $\forall n > N_1$ $0 < b_n < 1/2$

Quindi, $\forall n > N_1$, avremo $\frac{1}{b_n} > 2$

e quindi $\forall n > N_1$

$$\frac{a_n}{b_n} > 2a_n$$

Per il criterio del confronto, poiché

$$\frac{a_n}{b_n} > 2a_n \quad \forall n > N_1$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ diverge.

$$(2) \quad g(x) = e^{f(x)}, \quad g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Poiché le ipotesi del Teorema di Lagrange sono tutte soddisfatte, abbiamo che $\exists c \in (a, b)$ (ma non è affatto detto che tale c sia unico) t.c.

$$(b-a) g'(c) = g(b) - g(a)$$

ossia

$$(b-a) e^{f(c)} f'(c) = e^{f(b)} - e^{f(a)}$$

Quindi, la risposta corretta è A

$$(3) \quad G(x) = \int_0^{x^2} \sin^3(\sqrt{|t|}) dt$$

Posto

$$h(x) = x^2$$

abbiamo

$$G(x) = \int_0^{h(x)} \sin^3(\sqrt{|t|}) dt$$

Per il Teorema fondamentale del Calcolo e per il Teorema di derivazione della funzione composta, abbiamo

$$G'(x) = \sin^3 \sqrt{x^2}, \quad h'(x) = \sin^3 |x| \cdot 2x$$

e la risposta corretta è B

④ $P_2(x, 0) = a + bx + cx^2$ (sviluppo di McLaurin di f)

Dai noti risultati per i polinomi di Taylor / McLaurin, abbiamo

$$f(0) = a$$

$$f'(0) = b$$

$$\frac{f''(0)}{2} = c$$

Consideriamo, ora, $g(x) = x f(x^2)$

Abbiamo

$$g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$$

$$g'(x) = f(x^2) + x \cdot 2x \cdot f'(x^2) = f(x^2) + 2x^2 f'(x^2)$$

$$g'(0) = f(0) = a$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2x f'(x^2) + 4x f'(x^2) + 2x^2 \cdot 2x f''(x^2) \\ &= 6x f'(x^2) + 4x^3 f''(x^2) \end{aligned}$$

$$g''(0) = 0$$

Calcoliamo direttamente dalla definizione $g'''(0)$, perché

f è solo di classe C^2 . Abbiamo

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h) - g''(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h f'(h^2) + 4h^3 f''(h^2) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6f'(h^2) + 4h^2 f''(h^2) = 6f'(0) = 6b \end{aligned}$$

Poiché il limite del rapporto incrementale esiste finito, possiamo concludere che $\exists g'''(0)$ e $g'''(0) = 6b$.
Pertanto, per la g , avremo

$$\begin{aligned} P_3(x; 0) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 \\ &= 0 + ax + 0 \cdot x^2 + \frac{6b}{6}x^3 \\ &= ax + bx^3 \end{aligned}$$

e la risposta corretta è C

⑤ $K = [1, 2] \cup [3, 4]$

L'insieme è chiuso e limitato, ma non è un intervallo. Per cui vale sicuramente il Teorema di Weierstrass, ossia f ha massimo e minimo assoluti in K .

La risposta corretta è B. Poiché K non è un intervallo, non vale il Teorema del valore intermedio, quindi C in

generale è falsa.

⑥ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) \sim x - x_0$

Pertanto

$$g(x) = \ln(1 + [f(x)]^e) \sim \ln(1 + (x - x_0)^2) \\ \sim (x - x_0)^2 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^2}{x - x_0} = \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$$

Per definizione di o piccolo, poiché

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = 0 \implies g(x) = o((x - x_0)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

⑦ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

Per definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \text{ t.c. } \forall n > \bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

che è la risposta B

⑧ Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali definitivamente monotona.

Ciò significa che $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N$ risulta

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (\text{se monotona crescente})$$

oppure

$$a_{n+1} \leq a_n \quad (\text{se monotona decrescente})$$

A) in generale è falsa: basta considerare una successione monotona crescente e non limitata, come, ad esempio $a_n = n$

C) in generale è falsa: consideriamo $a_n = \frac{1}{n}$ che è monotona decrescente. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0.$$

D) in generale è falsa: consideriamo $a_n = -\frac{1}{n}$ che è monotona crescente. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Quindi la risposta corretta è B). Infatti, se $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente, abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n < +\infty$$