

(A1)

Punti di massimo assoluto per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2|x|^3}{x^4+5}\right)$$

Si osserva che f è pari: $f(x) = f(-x)$, quindi
basta trovare x_1 pto di massimo per f in $[0, +\infty)$
e poi $x_2 = -x_1$ per simmetria.

$$\text{In } [0, +\infty) \quad f(x) = \arctan\left(\frac{2x^3}{x^4+5}\right) \quad \text{e}$$

$\arctan$ è strett. crescente in $[0, +\infty)$, quindi
basta studiare il segno della derivata di

$$g(x) = \frac{2x^3}{x^4+5} \quad g'(x) = \frac{6x^2(x^4+5) - 4x^3(2x^3)}{(x^4+5)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^6 + 30x^2 - 8x^6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow 2x^6 - 30x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^4 - 15) \leq 0 \quad \Leftrightarrow x^4 - 15 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt[4]{15} \leq x \leq \sqrt[4]{15} \quad \text{Siccome in } [0, +\infty)$$

quindi

$x_1 = \sqrt[4]{15}$ pto di massimo assoluto per la funzione
 $x_2 = -\sqrt[4]{15}$.

$$M = f(x_1) = \arctan\left(\frac{2 \cdot 15^{3/4}}{20}\right) = \arctan\left(\frac{15^{3/4}}{10}\right)$$

(AZ)

$$\begin{cases} u''(t) + 12u'(t) + 36u(t) = 36t \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

• Soluzioni eq. omogenee con pol. caratteristici

$$\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0 \quad (\lambda + 6)^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -6$$

$$u_0(t) = C_1 e^{-6t} + C_2 t e^{-6t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

• Sol particolare con metodo somiglianze; $0 \neq \lambda_1, \lambda_2$

$$u_p(t) = At + B \quad A, B \in \mathbb{R} \quad \dot{u}_p = A \quad u_p'' = 0$$

$$12A + 36(At + B) = 36t$$

$$\begin{cases} 36A = 36 \\ 12A + 36B = 0 \end{cases} \quad A = 1$$

$$\Rightarrow B = -\frac{12}{36} = -\frac{1}{3}$$

$$u(t) = e^{-6t}(C_1 + C_2 t) + t - \frac{1}{3}$$

$$u'(t) = e^{-6t}(-6(C_1 + C_2 t) + C_2) + 1$$

$$0 = u(0) = C_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3}$$

$$0 = u'(0) = -6C_1 + C_2 + 1 \Rightarrow C_2 = -1 + 2 = 1$$

$$u(t) = e^{-6t}\left(\frac{1}{3} + t\right) + t - \frac{1}{3}$$

(A3)

$$f(x) = \sinh \left| \frac{2x}{x-4} \right| \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

- f è continua su tutto $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ perché $\sinh(\cdot)$ è continua, $|\cdot|$ è continua, $x \mapsto \frac{2x}{x-4}$ è continua (per $x \neq 4$) e composizione di funzioni continue è continua.

- Per la derivabilità: $\sinh$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, $y \mapsto |y|$ è derivabile tranne che in $y=0$.

Dunque l'unico punto di non derivabilità nel dominio della f è dove $\frac{2x}{x-4} = 0$ cioè $x=0$.

Quindi f derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

Calcoliamo f' , ricordando che $\frac{d}{dy} |y| = \text{sign } y$ per $y \neq 0$

$$f'(x) = \cosh \left| \frac{2x}{x-4} \right| \cdot \text{sign} \left(\frac{2x}{x-4} \right) \cdot \frac{2(x-4) - 2x}{(x-4)^2}$$

$$= \cosh \left| \frac{2x}{x-4} \right| \cdot \text{sign} \left(\frac{2x}{x-4} \right) \cdot \frac{(-8)}{(x-4)^2} =$$

$$= \begin{cases} \cosh \left(\frac{2x}{x-4} \right) \cdot \frac{8}{(x-4)^2} & \text{in } (0, 4) \\ \cosh \left(\frac{2x}{x-4} \right) \cdot \frac{-8}{(x-4)^2} & \text{in } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}$$

(A4)

$$\bullet W = 7e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$W^2 = 7^2 e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\overline{W} = 7e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \overline{W}^3 = 7^3 e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{W^2}{\overline{W}^3} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{7^2 e^{\frac{\pi}{2}i}}{7^3 e^{-\frac{3\pi}{4}i}} \right) = \frac{1}{7} \operatorname{Re} \left(e^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)i} \right) = \\ &= \frac{1}{7} \operatorname{Re} \left(e^{\frac{5\pi}{4}i} \right) = \frac{1}{7} \cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{14} \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{1}{\overline{z}^6} = 7i$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \overline{z} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\overline{z}^6 = \rho^6 e^{-6\theta i}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{\rho^6 e^{-6\theta i}} = 7e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (\Rightarrow) \quad \rho^{-6} e^{6\theta i} = 7e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \rho^{-6} = 7 & \rho = \sqrt[6]{\frac{1}{7}} \\ 6\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \Rightarrow \theta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$k=0, 1, 2, \dots, 5$$

(A5)

$$\bullet \int_{-1}^1 \cosh(8x) dx \underset{\text{PARTI}}{=} 2 \int_0^1 \cosh(8x) dx = 2 \cdot \frac{\sinh(8x)}{8} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\sinh(8)}{4}$$

$$\bullet \int x^2 \cos(8x) dx \underset{\text{PARTI}}{=}$$

$$F = \frac{\sin 8x}{8} \quad F' = \cos 8x$$

$$G = x^2 \quad G' = 2x$$

$$= x^2 \frac{\sin(8x)}{8} - \int \frac{\sin(8x)}{8} \cdot 2x dx \underset{\text{PARTI}}{=}$$

$$F = -\frac{\cos 8x}{32} \quad F' = \frac{\sin 8x}{4}$$

$$G = x \quad G' = 1$$

$$= x^2 \frac{\sin(8x)}{8} - \left(-\frac{x \cos 8x}{32} + \int \frac{\cos(8x)}{32} dx \right)$$

$$= x^2 \frac{\sin 8x}{8} + \frac{x \cos 8x}{32} - \int \frac{\cos 8x}{32} dx =$$

$$= x^2 \frac{\sin 8x}{8} + \frac{x \cos 8x}{32} - \frac{\sin 8x}{28} + C$$

(A6)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arctan(3x) + \sin x}{1 - e^{3x^3}} = L$$

Con gli sviluppi:

$$1 - e^{3x^3} = -3x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\arctan 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\text{NUM} = \cancel{2x} - \cancel{3x} + \cancel{\frac{27}{3}x^3} - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \frac{54 - 1x^3 + o(x^3)}{6} = \frac{53}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Dunque } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{53}{6}x^3 + o(x^3)}{-3x^3 + o(x^3)} = -\frac{53}{18}$$

A7

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \frac{\left(\cosh\left(\frac{2}{n^5}\right) - \cos\left(\frac{2}{n^5}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{3}{n}\right) - \sinh\left(\frac{3}{n}\right) \right)^2}{\ln\left(1 + \frac{3}{n^5}\right)}$$

Con gli sviluppi ed equivalenze asintotiche

$$\ln\left(1 + \frac{3}{n^5}\right) \sim \frac{3}{n^5} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\cosh\left(\frac{2}{n^5}\right) - \cos\left(\frac{2}{n^5}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^5}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^5}\right)^2 = \frac{4}{n^{10}}$$

$$\begin{aligned} \left(\sin\left(\frac{3}{n}\right) - \sinh\left(\frac{3}{n}\right) \right)^2 &\sim \left(-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{n}\right)^3 - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{n}\right)^3 \right)^2 = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{3}{n} \right)^6 = \frac{3^4}{n^6} \end{aligned}$$

Per criterio confronto asintotico basta studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \frac{\frac{4}{n^{10}} \cdot \frac{3^4}{n^6}}{\frac{3}{n^5}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cdot 3^3}{n^{10+6-\alpha-5}} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 10+6-\alpha-5 > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 10}$$

(A8)

$$\bullet f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \log\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$P_2(x, 2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2$$

$$f(2) = \log 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{4}{x^2}} \cdot \frac{-2 \cdot 4}{x^3} \quad f'(2) = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-8}{x^3 + 4x} \right) = -8 \frac{-(3x^2 + 4)}{(x^3 + 4x)^2}$$

$$f''(2) = \frac{-8 \cdot -16}{(16)^2} = \frac{2^8}{2^8} = \frac{1}{2}$$

$$P_2(x, 2) = \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2$$

ⓑ1

$$f: (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \log\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x\right)$$

Notiamo che $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x\right) = -\infty$

(perché $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$)

Per permanenza del segno $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (-1, -1+\delta)$
 $f(x) < 0$. quindi risposta esatta C

Oss: A) chiaramente f non è limitata in $(-1, \frac{1}{2})$
per il limite qui sopra.

B) f è crescente (comp. di funz. crescente)
e $f(0) = \log(\frac{\pi}{2}) > 0$ quindi $f > 0$ in $[0, 1]$

D) $f(1) > 0$, f continua (comp. funz. continue)
quindi, facendo conto del limite sopra, per
teorema degli zeri $\exists x_0 \in (-1, 1)$ t.c. $f(x_0) = 0$.

ⓑ2 $P_2(x, 0) = 1 + x + x^2$,

si deduce subito che • $f(0) = P_2(0, 0) = 1$

• $f'(0) = P_2'(0, 0) = 1$ • $f''(0) = P_2''(0, 0) = 2$

quindi sono false A, C, D.

la risposta esatta è B perché $f''(0) = 2 > 0$

e f'' continua quindi $f'' > 0$ in un intorno
di 0, e quindi f è convessa in un intorno di $x_0 = 0$.

$$(B3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n = +\infty$$

Dalla def di limite vuol dire

$$\forall M > 0 \exists \bar{n} \text{ t.c. } \forall n \geq \bar{n} \quad (-1)^n a_n \geq M$$

dunque risposta esatta $\boxed{C}$

Controesempio a A, B, D:

$$a_0 = a_1 = 0; \quad a_n = (-1)^n n \quad \forall n \geq 2.$$

$$(B4) \quad H(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt \quad f, g \in C^1$$

Per proprietà funzione integrale

$$H'(x) = f(x)g(x)$$

Per regola di Leibniz (derivata del prodotto)

$$H''(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Dunque risposta esatta $\boxed{B}$

$$(B5) \quad f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{e^{\sin^2 x}}$$

$$f(-x) = \frac{1}{e^{\sin^2(-x)}} = \frac{1}{e^{(-\sin x)^2}} = \frac{1}{e^{\sin^2 x}} = f(x)$$

~~MA NON è pari, visto che è definita solo in $(0, \frac{\pi}{2})$~~

$$\text{Calcoliamo } f'(x) = \frac{-e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x}{(e^{\sin^2 x})^2} < 0 \quad \text{in } (0, \frac{\pi}{2})$$

dunque f è strettamente decrescente, risposta esatta $\boxed{D}$

(B6) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f'(x_0) \neq 0$

Allora f' è continua in tutto $\mathbb{R}$.

- Se $f'(x_0) > 0$ allora $f' > 0$ in un intorno di x_0
 $\Rightarrow f$ strett. crescente in un intorno di x_0
- Se $f'(x_0) < 0$ allora $f' < 0$ in un intorno di x_0
 $\Rightarrow f$ strett. decrescente in un intorno di x_0 .

Risposta esatta è $\boxed{C}$

(B7) $f(x) = \cosh(x^2)$, sviluppiamo per $x \rightarrow 0$

$$\cosh(x^2) = 1 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^4}{24} + O(x^8) \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

Donc on a $f(x) - 1 - \frac{x^4}{2} = o(x^6)$ pour $x \rightarrow 0$

Resposta extra [C]

e si noti che tutte le altre opzioni sono false visto che

visio che

$$f(x) = 1 - \frac{x^4}{2} = \left[\frac{x^8}{24} + o(x^8) \right] \text{ per } x \rightarrow 0$$

Non $\in \sigma(x^8), \sigma(x^{10}), \sigma(x^{12})$!

B8) $\sum a_n$ assolutamente convergente
ovvero $\sum |a_n| < +\infty$.

Ma allora $|(-1)^n a_n| = |a_n|$ quindi
 $\sum |(-1)^n a_n| < +\infty$ e dunque

$\sum (-1)^n a_n$ è assolutamente convergente
(e quindi anche convergente)

Risposta nota: D