

Soluzioni APPELLO 20/6/24

$$A1) \quad u'(t) - \tan t \, u(t) = 2 \cos t \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$A(t) = \int_0^t \tan s \, ds = \int_0^t \frac{\sin s}{\cos s} \, ds = \log(\cos s) \Big|_0^t$$

$$= \log(\cos t).$$

$$e^{A(t)} = e^{\log(\cos t)} = \cos(t) \quad \left(e^{-A(t)} = \frac{1}{\cos t} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{A(t)} u(t) \right) = e^{A(t)} \left(u'(t) - \tan t \, u(t) \right) =$$

$$= e^{A(t)} \cdot (2 \cos t).$$

Integro fra 0 e t:

$$e^{A(t)} u(t) - \underbrace{e^{A(0)}}_1 u(0) = \int_0^t \cos(s) \cdot 2 \cos(s) \, ds$$

$$= \int_0^t (1 + \cos 2s) \, ds = t + \frac{\sin 2t}{2}$$

Da cui

$$u(t) = u(0) \cdot \frac{1}{\cos t} + \frac{t}{\cos t} + \frac{2 \sin t \cos t}{2 \cos t}$$

$$= \frac{u(0)}{\cos t} + \left(\sin t + \frac{t}{\cos t} \right)$$

al valore di $u(0) = c \in \mathbb{R}$ ho tutte le soluzioni.

La soluzione con $u(0) = \frac{1}{2}$ è

$$u(t) = \frac{1}{2 \cos t} + \sin t + \frac{t}{\cos t}$$

$$\boxed{A2} \quad I = \int_{x = \frac{e^{14}}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\log(2x) - 7} \right)^3 dx \quad \%$$

Sostituzione $\log(2x) - 7 = y$

$$\log x + \log 2 - 7$$

$$dy = \frac{dx}{x} \quad (\text{che c'è già!!})$$

$$\% = \int_7^{+\infty} \frac{1}{y^3} dy = -\frac{1}{2y^2} \Big|_7^{+\infty}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{14}}{2} \\ y &= 7 \\ "x &= +\infty" \\ "y &= +\infty" \end{aligned}$$

$$= -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2.49} = \frac{1}{98}$$

$$\boxed{A3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2n} \tanh(n) \left[1 - \cos \frac{2}{n}\right]^{4\alpha}}{\sinh(2n) (2 + \sin n)}$$

Usiamo come sempre confronto e
confronto asintotico:

$\tanh n \longrightarrow 1$ per $n \longrightarrow +\infty$
quindi non influenza convergenza

$\frac{e^{2n}}{\sinh(2n)} \longrightarrow 1$ per $n \longrightarrow +\infty$
quindi non influenza convergenza

$1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ quindi non influenza convergenza.

Resta da studiare

$$\left[1 - \cos \frac{2}{n}\right]^{4\alpha} :$$

$$\cos \frac{2}{n} \sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} \right)^2 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{quindi } \left[1 - \cos \frac{2}{n} \right] \sim 2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{quindi } \left[1 - \cos \frac{2}{n} \right]^{8\alpha} \sim 2^{8\alpha} \frac{1}{n^{8\alpha}} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{Studiamo convergenza } \sum \frac{1}{n^{8\alpha}} < +\infty$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 8\alpha > 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{\alpha > \frac{1}{8}}.$$

$$\underline{A_4)} \quad f: [0, +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{6} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ 2 + \frac{x}{\log(6x)} & \text{se } x > 0, x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

Studiamo la funzione:

• Continuità in $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + \frac{x}{\log(6x)} = 2 \quad \Leftrightarrow \text{OK}$$

Dunque f è continua nel suo dominio.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^-} 2 + \frac{x}{\log(6x)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} 2 + \frac{x}{\log(6x)} = +\infty$$

$$\bullet f'(x) = \frac{\log(6x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\log^2(6x)} = \frac{\log 6x - 1}{\log^2(6x)} \geq 0 \quad (x > 0)$$

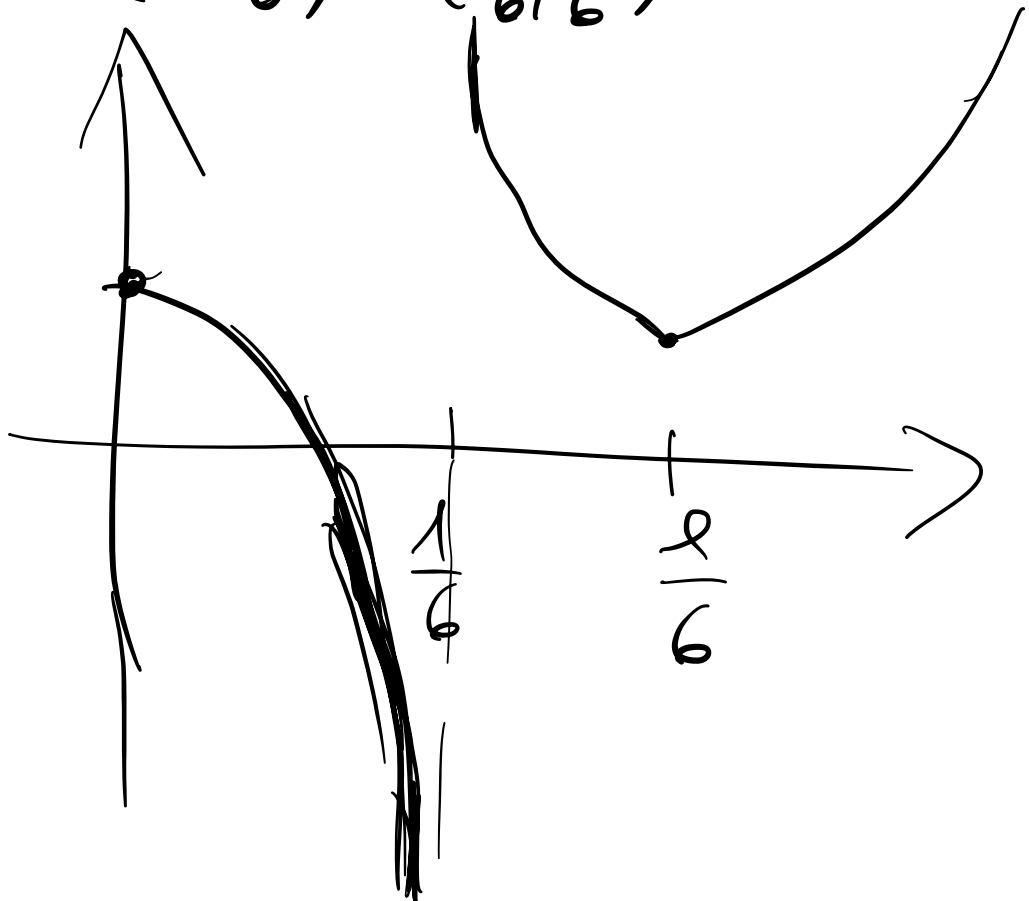
$$\Leftrightarrow 6x \geq 1 \quad (\Rightarrow) \quad x \geq \frac{1}{6}$$

Quindi f cresce per $x \geq \frac{1}{6}$ $(\frac{1}{6} \geq \frac{1}{6})$

e f decresce in $(0, \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

$$f(\frac{1}{6}) = 2 + \frac{1}{6}$$

$$f(0) = 2$$



Si vede chiaramente che

$x = \frac{2}{6}$ è pto di minimo locale

$x = 0$ è pto di massimo locale

$$\boxed{A5} \quad f(x) = \sqrt{1 + \log(1+2x)} \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \log(1+2x)}} \cdot \frac{2}{1+2x}; \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2\sqrt{1 + \log(1+2x)} - (1+2x) \cdot \frac{1}{(1+2x)^2}}{(1 + \log(1+2x))^2}$$

$$f''(0) = \frac{-3}{1} = -3$$

$$P_2(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2$$

A6 $f(x) = \sin(6x) \cos(7x) e^{2x}$ $f(\pi) = 0$

$$f'(x) = e^{2x} \left[2 \sin(6x) \cos(7x) + 6 \cos(6x) \cos(7x) - 7 \sin(6x) \sin(7x) \right]$$

$$f'(\pi) = e^{2\pi} \cdot 6 \underbrace{\cos(6\pi)}_{=1} \underbrace{\cos(7\pi)}_{=-1} = -6e^{2\pi}$$

$$T(x) = -6e^{2x} (x - \pi)$$

A7 Radici terze di $w = 2(1+i)$
 ovvero soluzioni di $z^3 = 2(1+i)$
 Scrivo $2(1+i)$ in forma esponenziale

$$|2(1+i)| = 2\sqrt{2}$$

$$2(1+i) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad z^3 = \rho^3 e^{3\theta i} = 2\sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$\rho = (2\sqrt{2})^{1/3} \quad 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \theta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$z_k = \rho e^{i\theta_k} \quad k=0,1,2$$

$$z^2 - |z|^2 + 16z + 2(\operatorname{Im} \bar{z})^2 + 2\bar{z} = 1 + 6i$$

$$z = x + yi \quad \bar{z} = x - yi$$

$$z^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \quad |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\operatorname{Im} \bar{z} = -y \quad (\operatorname{Im} \bar{z})^2 = y^2$$

Quindi abbiamo:

$$\cancel{x^2 + 2xyi} \cancel{(-y^2)} - \cancel{x^2} \cancel{(-y^2)} + \cancel{x + 2y^2} + 2x - 2yi = 1 + 6i$$

$$\begin{cases} 3x = 6 \rightarrow x = 2 \\ 2xy - 2y = 1 \Rightarrow 4y - 2y = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{z}$$

Sol: $z = 2 + \frac{i}{z}$

Ag $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{\frac{7}{\arcsin x}} =$

Noto che $\tan 2x \sim 2x$ per $x \rightarrow 0$
 $\arcsin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \tan 2x)^{\frac{1}{\tan 2x}} \right]^{\frac{7 \tan 2x}{\arcsin x}}$$

$\downarrow$ limite notevole Nopier

$$= e^{14} \quad \text{perché } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \tan 2x}{\arcsin x} = 14.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! + 2n \sin n - 7}{n! (7n+1)^2 + n^{14} \tanh(n^7)} =$$

= solo infiniti fattore più forte

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)!}{n! (7n+1)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1) \cancel{n!}}{\cancel{n!} (7n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{49n^2} = \frac{1}{49}$$

B1

$$P_{10}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k!}$$

$$f^{(6)}(x_0) = ?$$

$$\frac{f^{(6)}(x_0) (x-x_0)^6}{6!}$$

è il resto di pol
di Taylor che ci intere
 $(x-x_0)^{k+1} = (x-x_0)^6$?

per quale k ho
 $k=5 \Rightarrow$

$$\frac{f^{(6)}(x_0)}{6!} = \frac{1}{5!}$$

$$\Rightarrow f^{(6)}(x_0) = 6 \quad \text{quindi}$$

A

B2

$$a_{2n} \geq 2n \quad \forall n \quad \text{quindi}$$

Se rinominiamo $k=2n$ $a_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$,
e pari

$$\text{e } \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty$$

per confronto

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} k = +\infty \right) \quad \text{siccome}$$

quindi **C**

Le altre opzioni sono chiaramente false

$$a_n = \begin{cases} 4^n & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

è un controesempio a tutte,

B3 Per def di limite destro

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{vuol dire}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

$$x \in (0, \delta) \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \varepsilon$$

dunque lo **D**

B4 $g(x) = \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}$ $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 f continua.

Chiaro che anche g è continua su $[a, b]$ per proprietà funz.

continue (prodotto, rapporto...)

Per Weierstrass dunque g ha massimo e

minimo in $[a, b]$.

Dunque la risposta è $\boxed{C}$

B5 f derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt[3]{f(x)} = f(x)^{1/3}$

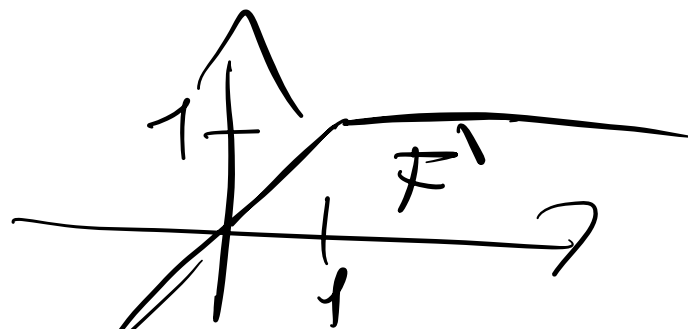
Per teorema derivata funzione composta, se $f(x_0) \neq 0$ allora g è derivabile in x_0 e vale

$$g'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)^{2/3}}$$

Dunque è giusta la $\boxed{A}$

B6 $F(x) = \int_{-1}^x \min\{t, 1\} dt$

$$F'(x) = \min\{x, 1\}$$



Nota che F' è crescente, quindi F è convessa in $\mathbb{R}$

ipotesi esatta: $\boxed{A}$.

$$\boxed{B7} \quad f(x) = o(g(x)) \quad h(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 1.$$

quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) f(x)}{g(x) g(x)} = 0$

↓₁ ↓₀

ovvero $h(x) f(x) = o(g^2(x)) \text{ per } x \rightarrow 0$

quindi ipotesi corretta è $\boxed{B}$

$$\boxed{B8} \quad \sum \frac{\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n^2 + n \log n}$$

$\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty$
quindi non ha influenza sulle

convergente.

Però $\sum \frac{1}{n^2 + n \log n}$ che

converge assolutamente

(si noti che la serie ha 2 termini
positivi già in partenza)

$\cos x > 0$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$!)

Quindi è vero lo $\square$