

PARTE A

① $z(z-2i) = 4$

$$z^2 - 2iz - 4 = 0$$

Possiamo usare la formula ridotta per le equazioni algebriche di secondo grado. Abbiamo

$$z = i \pm \sqrt{-1 + 4}$$

$$z = i \pm \sqrt{3}$$

che possiamo anche riscrivere

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = -\sqrt{3} + i$$

Osserviamo che

$$z^2 - 2iz - 4 = 0 \Rightarrow z^2 - 2iz - 1 = 3$$

$$(z-i)^2 = 3 \Rightarrow z-i = \pm\sqrt{3}$$

da cui ricaviamo la stessa soluzione

②
$$\begin{cases} u'' + 36u = t \\ u(0) = 3 \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale omogenea è

$$\lambda^2 + 36 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 6i$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione è

$$u = C_1 \cos 6t + C_2 \sin 6t + y_p$$

Poiché il termine noto t è un polinomio di 1° grado e l'ordine minimo di derivazione di u nell'equazione differenziale è zero, avremo

$$y_p = At + B$$

Imponendo che sia soluzione, abbiamo

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0$$

ed anche

$$0 + 36[At + B] = t$$

da cui otteniamo

$$A = \frac{1}{36}, \quad B = 0$$

Quindi:

$$u = C_1 \cos 6t + C_2 \sin 6t + \frac{1}{36} t$$

$$u' = -6C_1 \sin 6t + 6C_2 \cos 6t + \frac{1}{36}$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ 6C_2 + \frac{1}{36} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 3 \\ C_2 = -\frac{1}{216} \end{matrix}$$

La soluzione cercata, quindi è

$$u = 3 \cos 6t - \frac{1}{216} \sin 6t + \frac{1}{36} t$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x - \arctan(2x)}{x^3} & , x > 0 \\ a^{\cos x} & , x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a^{\cos x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \arctan 2x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \left[\cancel{2x} - \cancel{2x} + \frac{1}{3} (2x)^3 + o(x^3) \right]$$

$$= \frac{8}{3}$$

Quindi, per poter prolungare f con continuità in $x=0$, dobbiamo avere

$$a = \frac{8}{3}$$

Quanto alla retta tangente in $x = -\pi/2$, abbiamo

$$\Gamma_{tg}: y - f(-\pi/2) = f'(-\pi/2)(x + \pi/2)$$

$$f(-\pi/2) = a^{\cos(-\pi/2)} = a^0 = 1 \quad [\text{qualunque sia } a]$$

$$f'(x) = \left(\frac{8}{3}\right)^{\cos x} \cdot \ln \frac{8}{3}; \quad f'(-\pi/2) = \left(\frac{8}{3}\right)^0 \ln \frac{8}{3} = \ln \frac{8}{3}$$

Quindi

$$\Gamma_{tg}: y - 1 = \ln \frac{8}{3} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad L_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh \frac{2}{n} - e^{-3/n^2}}{\ln\left(1 + \frac{4}{n}\right) - \sin \frac{4}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left[\cancel{1} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\cancel{\frac{4}{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left[\cancel{\frac{4}{n}} + \frac{1}{6} \left(\frac{4}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{-\frac{8}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^2}}{-\frac{8}{n^2}} = -\frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-3}} \quad \text{converge perche' } x-3 > 1,$$

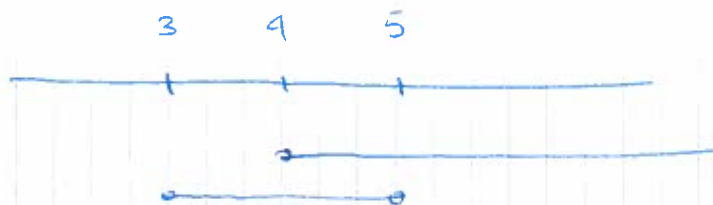
$$\text{cioe' } x > 4$$

D'altro canto $\sum_{n=0}^{\infty} (4-x)^n$ e' una serie geometrica, che converge se

$$-1 < 4-x < 1$$

$$3 < x < 5$$

Quindi, l'insieme di convergenza e' dato da



$$A = (4, 5)$$

$$\inf A = 4$$

$$\sup A = 5$$

$$L = \sup A - \inf A = 1$$

6) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^{1+x^2/2}}{x} = e \cdot \frac{e^{x^2/2}}{x}$$

Osserviamo che f è dispari

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

Inoltre

$$f'(x) = e \cdot \frac{x e^{x^2/2} \cdot x - e^{x^2/2}}{x^2}$$

$$= \frac{e}{x^2} (x^2 - 1) e^{x^2/2}$$

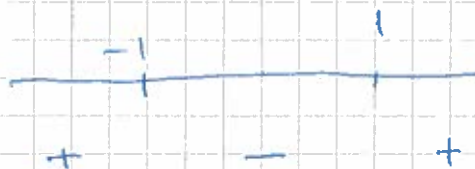
Pertanto,

$$f'(x) \geq 0$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x \leq -1,$$

$$x \geq 1$$



$$x_1 = 1$$

è un minimo locale

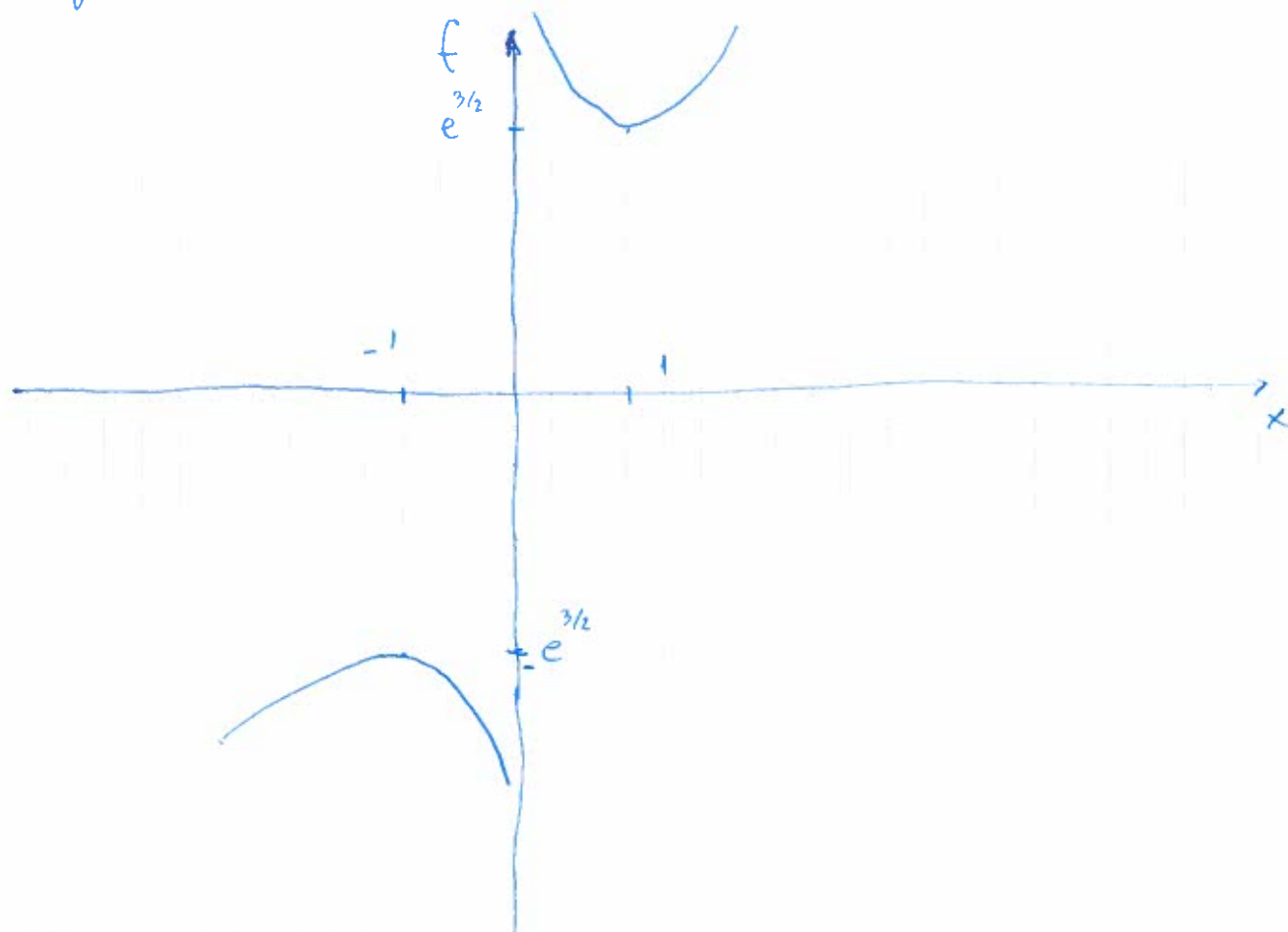
$$f(x_1) = e^{3/2}$$

$$x_2 = -1$$

è un massimo locale

$$f(x_2) = -e^{3/2}$$

Il grafico è in figura sotto



$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} \quad \int \ln(x^2+8) dx &= \text{per parti} = x \ln(x^2+8) dx + \\
 &- \int \frac{x \cdot 2x}{x^2+8} dx = x \ln(x^2+8) - 2 \int \frac{x^2+8}{x^2+8} dx \\
 &+ 16 \int \frac{1}{x^2+8} dx = x \ln(x^2+8) - 2x + \\
 &+ \frac{16}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2} \frac{dx}{2\sqrt{2}} = x \ln(x^2+8) - 2x + \\
 &+ \frac{8}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) + C.
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = (x+4) \cos(9x)$$

Dagli sviluppi noti sappiamo che

$$\cos 9x = 1 - \frac{1}{2} 81x^2 + o(x^2)$$

Pertanto

$$f(x) = (x+4) \left(1 - \frac{81}{2} x^2 + o(x^2) \right)$$

$$= x + 4 - 2 \cdot 81 x^2 + o(x^2)$$

$$= 4 + x - 162 x^2 + o(x^2)$$

Pertanto,

$$P_2(x, 0) = 4 + x - 162 x^2.$$

PARTE B

$$\textcircled{1} \quad P_2(x, 1) = 3 + 6x + 9x^2$$

Dalla teoria sappiamo che

$$f(1) = P_2(1) = 3 + 6 + 9 = 18$$

$$f'(1) = P_2'(1) = 6 + 18x \Big|_{x=1} = 24$$

$$f''(1) = P_2''(1) = 18$$

Quindi, la risposta corretta è A

② (a_n) è successione convergente $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
 con $L \in \mathbb{R}$ finito

Supponiamo, allora, che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \Rightarrow \text{D)} \text{ è falsa perché}$$

è violata la CN di conv.

E diciamo che in tal caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{A)} \text{ è falsa}$$

perché è violata la CN di convergenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_n) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{B)} \text{ è falsa}$$

per lo stesso motivo

Mostriamo che C) è corretta (non solo per esclusione)
 Intanto, qualunque sia il valore L del limite di (a_n) è

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= L - L = 0 \end{aligned}$$

e quindi la CN di convergenza è soddisfatta.

Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) &= \cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + a_4 - \cancel{a_3} + \dots \\ &\quad + a_{n+1} - a_n + \dots \end{aligned}$$

Quindi, otteniamo che

$$S_N = \sum_{n=1}^N (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_1,$$

da cui, detta S la somma della serie, è

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n - a_1 \\ = L - a_1 < +\infty,$$

dove L è il limite della successione. Quindi, effettivamente, la serie converge.

③ $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

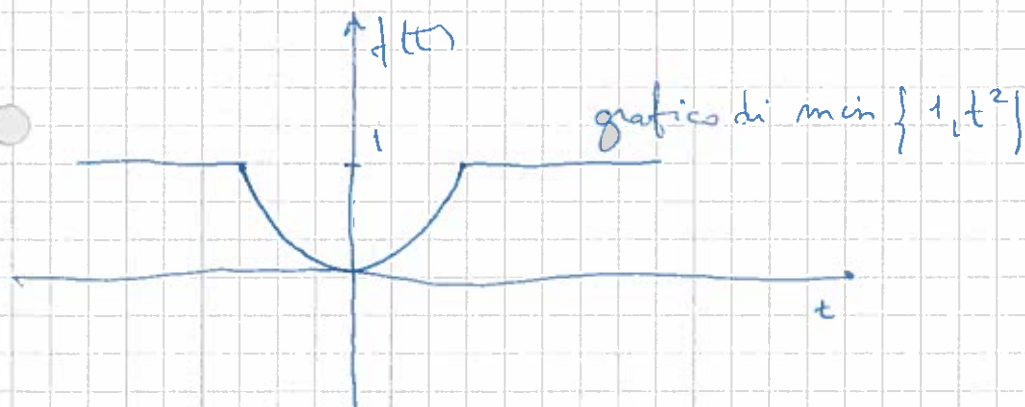
La funzione è dispari. Infatti

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

$$f(-x) = \arctan \left(-\frac{1}{x} \right) = -\arctan \frac{1}{x}.$$

Quindi C) è la risposta corretta.

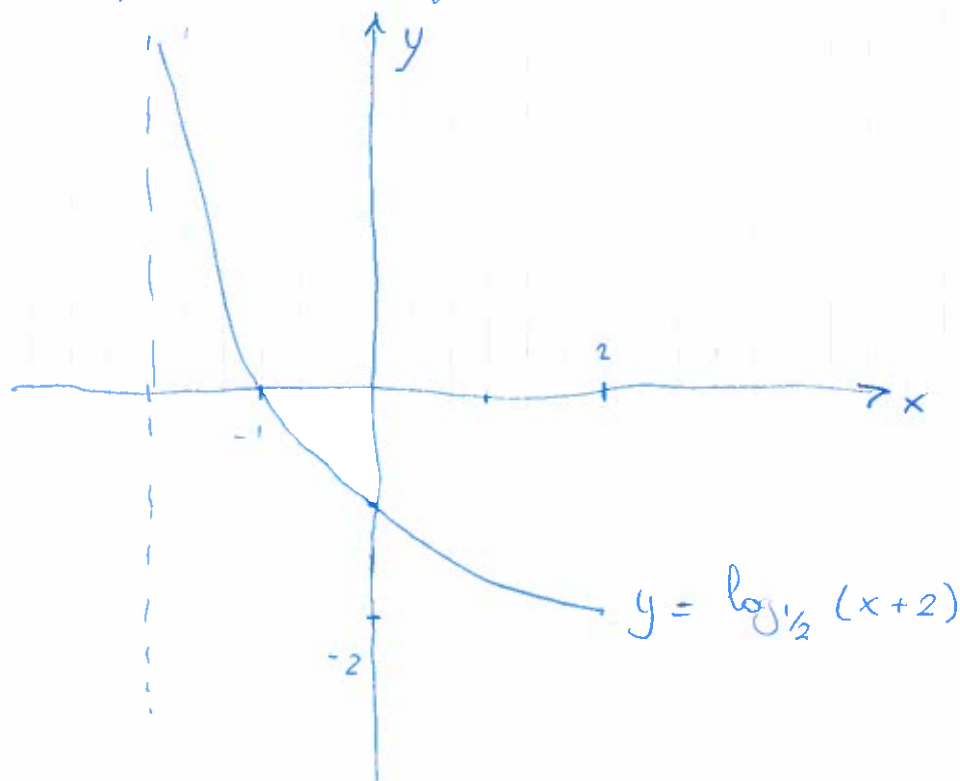
④ $F(x) = \int_0^x \min \{1, t^2\} dt$



Osserviamo che $f(t) = \min\{1, t^2\}$ è di classe C^0 , ma non di classe C^1 . Pertanto, per il Teorema fondamentale del Calcolo, F è di classe C^1 e la risposta corretta è D).

⑤ $f: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

Il grafico è quello in figura



È chiaro che in $x_0 = -1$ f si annulla. Quindi la risposta corretta è B)

⑥ Poiché $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^2 possiamo scrivere il suo sviluppo di Taylor ^{centrato in a} con resto di Lagrange nell'intervallo $[a, b]$. Ne segue che $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2$$

con $c \in (a, b)$. Se scegliamo $x = b$, abbiamo

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2$$

che è la risposta B)

$$\textcircled{7} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(a_n) = l \in \mathbb{R}$$

Se scegliamo

$$a_n = -\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

abbiamo che

$$a_{2m+1} = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$a_{2m} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Quindi la successione a_n

• non è monotona $\Rightarrow$ A è falso

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \nexists \Rightarrow$ B è falso
 $\Rightarrow$ C è falso

Effettivamente (a_n) non è convergente, anche se

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos a_n = 0$$

$$\textcircled{8} \quad f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

Se scriviamo lo sviluppo di Taylor/Mc-Laurin centrato in $x=0$ con resto di Peano, abbiamo

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{f'(0)x}_{=0} + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

da cui

$$f(x) = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi, la risposta corretta è D