$\boxed{A1}$

Determiniamo dapprima l'integrale generale dell'eq. differenziale.

In riferimento al modello $\quad u' + a(t)u = b(t)$

risulta $\quad a(t) = -(3t^2+1)$ per l'eq. assegnata. Calcoliamo

una sua primitiva $\quad A(t) = \int -(3t^2+1)\,dt = -t^3 - t$

e moltiplichiamo l'eq. per $e^{A(t)}$

$$[u' - (3t^2+1)u]e^{-t^3-t} = 6(3t^2+1)e^{-t^3-t}$$

$$\left(u(t)e^{-t^3-t}\right)' = 6(3t^2+1)e^{-t^3-t}$$

$$u(t)e^{-t^3-t} = 6\int (3t^2+1)e^{-t^3-t}\,dt$$

$$= -6e^{-t^3-t} + c$$

da cui $\quad u(t) = -6 + ce^{t^3+t}$

Imponendo $\quad u(0)=0 \quad$ troviamo $\quad c = 6$, così che la soluzione del

problema di Cauchy è $\quad u(t) = -6 + 6e^{t^3+t}$.

$\boxed{A2}$

Per calcolare L_1 usiamo gli sviluppi di Taylor di $\operatorname{tg} x$ e $\tanh x$ con

centro $x_0 = 0$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0$$

Pertanto $\quad \operatorname{tg} x - \tanh x = \frac{2}{3}x^3 + o(x^4) \quad$ per $x \to 0$

da cui si ricava $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{2}{n}\right) - \tanh\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad$ per $n \to +\infty$

e quindi $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{2}{n}\right) - \tanh\left(\frac{2}{n}\right) \sim \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{n^3} \quad$ per $n \to +\infty$

Per il denominatore basta la stima asintotica

$$\sin\left(\frac{5}{n^3}\right) \sim \frac{5}{n^3} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Ne segue che
$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n^3}} = \frac{16}{15}$$

Per L_2, riscriviamo la funzione come segue

$$[1+\operatorname{tg}(2x)]^{\frac{1}{\sin(7x)}} = e^{\ln[1+\operatorname{tg}2x]^{\frac{1}{\sin(7x)}}} = e^{\frac{\ln[1+\operatorname{tg}(7x)]}{\sin(7x)}}$$

e calcoliamo il limite dell'esponente:

$$\frac{\ln(1+\operatorname{tg}(2x))}{\sin(7x)} \sim \frac{\operatorname{tg}(2x)}{7x} \sim \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7} \qquad \text{per } x\to 0$$

Pertanto $L_2 = e^{2/7}$.

$\boxed{A3}$

Il calcolo diretto produce
$$f'(x) = e^{-x+7}(-x^2-4+2x)$$
$$f''(x) = e^{-x+7}(-2x+2+x^2+4-2x)$$

da cui $f'(0) = -4e^7$, $f''(0) = 6e^7$

Il polinomio richiesto è:

$$f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}x^2 = 4e^7 - 4e^7x + 3e^7x^2$$

Oppure, possiamo ricorrere allo sviluppo di e^x:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

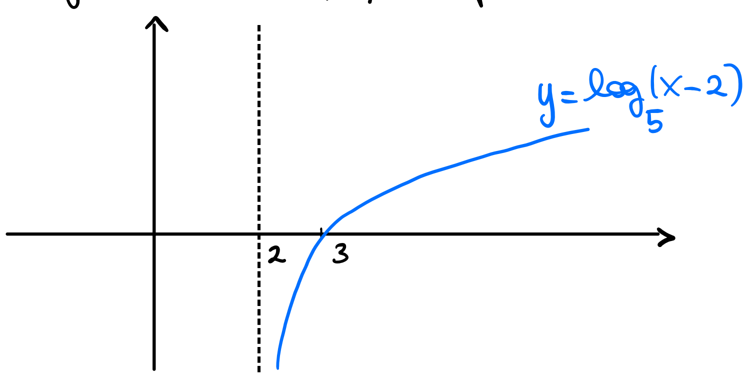
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

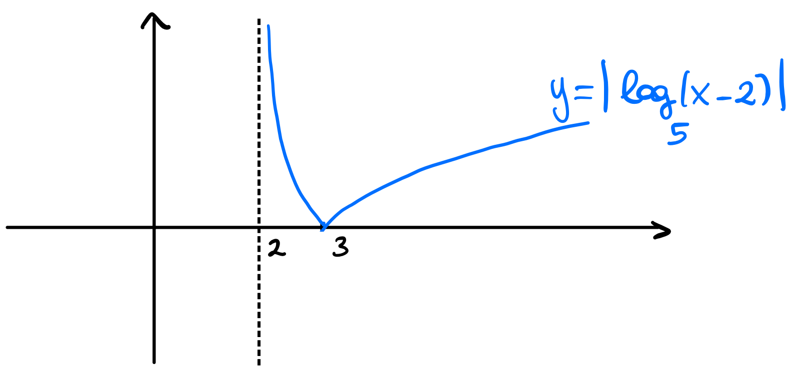
$$f(x) = (x^2+4)e^{-x+7} = e^7 (x^2+4)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

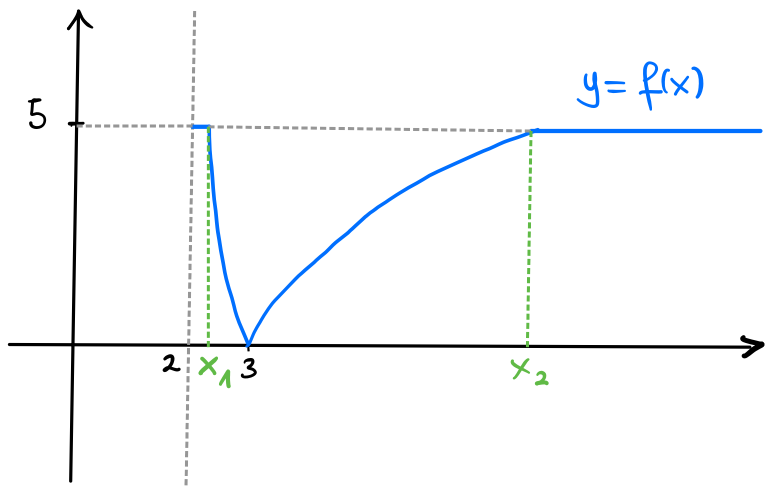
$$= e^7 \left(x^2 + 4 - 4x + \frac{4}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \underbrace{e^7 \left(4 - 4x + 3x^2\right)}_{\text{polinomio richiesto}} + o(x^2)$$

nei prodotti prendiamo le potenze con esponenti ≤ 2

$\boxed{A4}$ Tracciamo il grafico di f, a partire da quello di $\log_5(x-2)$







Deduciamo che $m = 0$, $M = 5$, che l'unico punto di minimo è 3, mentre i punti di massimo sono tutti i punti dell'insieme

$$]2, x_1] \cup [x_2, +\infty[$$

Determiniamo x_1 e x_2 risolvendo l'equazione

$$|\log_5(x-2)| = 5$$

$$\iff \log_5(x-2) = \pm 5 \iff x-2 = 5^{\pm 5}$$

$$\iff x_{1/2} = 2 + 5^{\pm 5}$$

In particolare $x_1 = 2 + 5^{-5}$ e $x_2 = 2 + 5^5$.

A5

$$\int \frac{\ln(8x)}{(1+2x)^2}\,dx = \int \ln(8x)\,(1+2x)^{-2}\,dx = \int \ln(8x)\left[\frac{(1+2x)^{-1}}{-2}\right]' dx$$

$$\underset{\text{per parti}}{=} -\frac{1}{2}\frac{\ln(8x)}{(1+2x)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+2x}\,dx =$$

$$\underset{\text{scomposizione in fratti semplici}}{=} -\frac{\ln(8x)}{2(1+2x)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{1+2x}\right)dx$$

$$= -\frac{\ln(8x)}{2(1+2x)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{A6}$ $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a\cosh x = a$$

f si prolunga con continuità in $0 \iff$ esiste finito $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\iff a = \log_2 e$

In tal caso $f(0) = \log_2 e$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 e \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)}{x} =$$

$$\log_2 e \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \log_2 e \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\log_2 e$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (\log_2 e)\sinh x = 0$$

$\boxed{A7}$ Poniamo $w = iz$.

L'equaz. da risolvere è $w^3 = 7^3(1+i)$, ossia

$$w^3 = 7^3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

Usando la formula delle radici terze:

$$w_k = \sqrt[3]{7^3\sqrt{2}}\, e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}$$

$$= 7\sqrt[6]{2}\, e^{i\theta_k} \qquad k=0,1,2$$

Siccome $i = e^{i\pi/2}$, ricaviamo da $w_k = iz_k = e^{i\pi/2} z_k$

$$z_k = w_k e^{-i\pi/2} = 7\sqrt[6]{2}\, e^{i(\theta_k - \pi/2)}$$

$$\theta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \qquad k=0,1,2$$

$\boxed{A8}$ Osserviamo che

$$\operatorname{tg}\frac{1}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$$e^{4n^{-1/2}} - 1 = e^{\frac{4}{n^{1/2}}} - 1 \sim \frac{4}{n^{1/2}} \quad \text{per } n\to+\infty$$

Il termine generale della serie assegnata è asintotico a

$$\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{4}{n^{1/2}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{4}{n^{\alpha+2}} \quad \text{per } n\to+\infty.$$

La serie $\sum \frac{4}{n^{\alpha+2}}$ converge se e solo se $2+\alpha>1$ ossia $\alpha>-1$.

Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie data converge se e solo se $\alpha > -1$

$\boxed{B1}$ $\boxed{B}$

Siccome $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) < 0$, per il teorema della permanenza del segno $a_{n+1} - a_n < 0$ definitivamente ossia la succ. (a_n) è definitivamente decrescente.

Per il teorema sulle successioni monotone, esiste

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in [-\infty, +\infty[.$$

Se ℓ fosse finito, per l'algebra dei limiti risulterebbe $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \ell - \ell = 0$ mentre per ipotesi tale limite è -5. Ne segue che ℓ non può essere finito. Perciò $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

$\boxed{B2}$ $\boxed{D}$

Osserviamo che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Quindi $\boxed{C}$ è falsa.

Anche $\boxed{B}$ è falsa dato che $f(0) = 0$.

Notiamo che

$$f(x) = g(\operatorname{arctg} x) \qquad \text{dove} \qquad g(t) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - t} - \frac{4}{\pi}$$

g è crescente in $\left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right)$

$\operatorname{arctg} x$ è crescente da $[-1,1)$ in $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

Ne segue che $f(x)$ è crescente in $[-1,1)$ in quanto composizione di funzioni crescenti. Ciò implica che

$f(x) > f(0) = 0$ se $x > 0$ e quindi $\boxed{A}$ è falsa.

Invece $\boxed{D}$ è vera, dato che $f(-1) \leq f(x) < f(0) = 0$ per ogni $x \in [-1, 0)$.

$\boxed{B3}$ $\boxed{A}$

$$f(x) = \ln\left(\frac{3}{3-x}\right) = \ln 3 - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3-x} > 0 \quad \text{se} \quad x \in [0,3) \; (\Rightarrow f \text{ è strett. cresc})$$

$$f''(x) = \frac{1}{(3-x)^2} > 0 \quad \text{in } [0,3) \quad \Rightarrow f \text{ è convessa in } [0,3)$$

$\boxed{B4}$ $\boxed{D}$

Sappiamo che
$$f(0) = P_2(0;0)$$
$$f'(0) = P_2'(0;0)$$
$$f''(0) = P_2''(0;0)$$

ossia la funzione e il polinomio hanno le stesse derivate nel centro dello sviluppo. Quindi

$$P_2(0;0) = 1 = f(0)$$
$$P_2'(0;0) = 2 = f'(0)$$
$$P_2''(0;0) = -8 = f''(0)$$

Siccome $f''(0)<0$, per il T. della permanenza del segno (f'' è continua in 0 grazie alle ipotesi) $f''(x)<0$ in un intorno di 0. Perciò $\boxed{D}$ è vera

$\boxed{B5}$ $\boxed{B}$

Per il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale:

F e G sono di classe $C^2(\mathbb{R})$ e risulta

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$G'(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Derivando di nuovo:

$$F''(x) = f'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$G''(x) = g'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando queste identità e la formula di derivazione del prodotto:

$$(F \cdot G)''(x) = F''(x)G(x) + 2F'(x)G'(x) + F(x)G''(x)$$

otteniamo

$$(F \cdot G)''(x) = f'(x)\,G(x) + 2\,f(x)g(x) + F(x)\,g'(x)$$

che è $\boxed{B}$.

$\boxed{B6}$ $\boxed{B}$

Ricordando che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$

significa $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, la risposta corretta

è $\boxed{B}$ in quanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\cancel{x}} = 0$$

$\boxed{B7}$ $\boxed{D}$

Per ipotesi $0 < a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Iteriamo, cioè applichiamo ripetutamente, questa relazione:

$$0 < a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n < \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} a_{n-1}\right)}_{\frac{1}{2^2} a_{n-1}} < \underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} a_{n-2}\right)}_{\frac{1}{2^3} a_{n-2}} < \dots < \frac{1}{2^{n+1}} a_0$$

Essendo $a_0 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ il termine generale di una serie convergente, per il cr del confronto, la serie data converge.

In particolare $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e quindi $\boxed{B}$ e $\boxed{C}$ sono false in quanto non è soddisfatta la cond. necessaria di convergenza.

B8 $\boxed{A}$

La funzione $g(x) = \ln f(x)$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange in ogni intervallo $[a,b]$ con $a<b$.

Pertanto esiste $c \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$$

ossia

$$\frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{f(c)}$$

da cui infine

$$\frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = \frac{f'(c)}{f(c)}$$

che è la $\boxed{A}$.