1. Consideriamo

$$f(x) = \frac{\sin(11x)}{1-6x}$$

Per costruire $P_2(x;0)$ possiamo lavorare in due modi.

<u>1° modo</u>

$$P_2(x;0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Perciò $f(0) = 0$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{11\cos(11x)(1-6x) + 6\sin(11x)}{(1-6x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{11 \cdot 1}{1} = 11$$

$$f''(x) = \frac{\left[-121\sin(11x)(1-6x) - \cancel{66\cos(11x)} + \cancel{66\cos(11x)}\right]\cdot(1-6x)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(1-6x)}(-6)\left[11\cos(11x)(1-6x) + 6\sin(11x)\right]}{(1-6x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(0) = +\frac{12\cdot 11}{1} = 132$$

Quindi

$$P_2(x;0) = 11x + \frac{132}{2}x^2 = 11x + 66x^2$$

<u>2° modo</u> (più semplice)

Utilizziamo gli sviluppi noti.

Pertanto

$$f(x) = \sin(11x) \cdot \frac{1}{1-6x}$$

$$= \left(11x - \frac{1}{6}(11x)^3 + \dots\right)\left(1 + 6x + (6x)^2 + \dots\right)$$

$$= \boxed{11x + 66x^2} + \dots$$

e $P_2(x;0)$ si riduce ai primi due termini dello sviluppo, ossia

$$P_2(x;0) = 11x + 66x^2$$

che (ovviamente) coincide con quanto trovato prima.

Concludiamo che

$$P_2(x;0)\Big|_{x=1} = 11 + 66 = 77$$

(2) $z_1 = 2+i, \quad z_2 = 1-4i, \quad z_3 = 4e^{i\pi/4}$

Dobbiamo calcolare $\sqrt{2}\cdot 4 \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right)$

Osserviamo che

$$\frac{z_1+z_2}{z_3} = (2+i+1-4i)\,\frac{1}{4}\,e^{-i\pi/4}$$

$$= \frac{3-3i}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{3-3i}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{2}\,(1-i)^2 = \frac{3\sqrt{2}}{8}(1-2i-1)$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{4}i$$

Quindi $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}i\right) = 0$

e concludiamo che

$$\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{z_1 + z_2}{z_3}\right) = 0$$

---

③ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin \frac{6}{n}\right|^{\alpha}}{n^8 + (\sin n)^8} \left(e^{6/n^8} - 1\right)$$

Se utilizziamo il criterio del comportamento asinto_tico, abbiamo

$$a_n = \frac{\left|\sin \frac{6}{n}\right|^{\alpha}}{n^8 + (\sin n)^8} \left(e^{6/n^8} - 1\right)$$

$$\sim \frac{\left(\frac{6}{n}\right)^{\alpha}}{n^8} \left(\cancel{1} + \frac{6}{n^8} - \cancel{1}\right) = \frac{6^{1+\alpha}}{n^{16+\alpha}}$$

Affinché la serie converga, deve essere

$$16 + \alpha > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha > -15$$

Quindi

$$I = \{ \alpha \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \alpha > -15 \}$$

e

$$\inf I = -15$$

---

(4)

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{[\ln(1+x^3) - 3\ln x](3x^3 + 5x)}{(e^{-x}+2)\arctan x}$$

Osserviamo che

$$\ln(1+x^3) - 3\ln x = \ln(1+x^3) - \ln x^3 = \ln\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$$

Pertanto, utilizzando gli sviluppi asintotici, abbiamo

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^3} \cdot 3x^3}{2 \cdot \arctan x} = \frac{3}{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{3}{\pi}$$

Pertanto

$$2\pi L = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$$

---

(5) $$I = \int_0^4 x \sin(x-4)\cos(x-4)\, dx$$

Osserviamo che $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

Pertanto, possiamo riscrivere

$$I = \int_0^4 \frac{x}{2} \sin[2(x-4)]\, dx$$

Integriamo per parti.

$$I = -\frac{x}{2}\,\frac{\cos[2(x-4)]}{2}\Big|_0^4 + \frac{1}{4}\int_0^4 \cos[2(x-4)]\,dx$$

$$= -1 + \frac{1}{4}\,\frac{\sin[2(x-4)]}{2}\Big|_0^4$$

$$= -1 - \frac{1}{8}\sin(-8) = -1 + \frac{1}{8}\sin 8$$

Pertanto

$$8I - \sin 8 = -8 + \sin 8 - \sin 8 = -8$$

---

(6)
$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-8)^2 & 0 \le x < (\sqrt{2}+1)\cdot 4 \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)4^5}{x} & x \ge (\sqrt{2}+1)\cdot 4 \end{cases}$$

Osserviamo che $f \ge 0$ e $f(0) = f(8) = 0$

Pertanto $m = 0$.

Si tratta ora di determinare M.

Osserviamo che in $[4(\sqrt{2}+1), +\infty)$ f è decrescente, perché

$$f'(x) = -\frac{(\sqrt{2}+1)4^5}{x^2} < 0$$

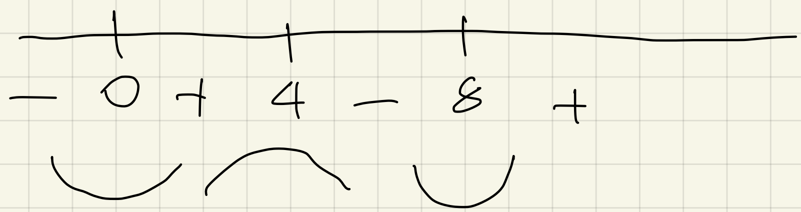
e

$$f(4(\sqrt{2}+1)) = \frac{\cancel{(\sqrt{2}+1)}\, 4^{\cancel{5}\,4}}{\cancel{4}\cancel{(\sqrt{2}+1)}} = 4^4 = 2^8 = 256$$

Per quanto riguarda l'intervallo $[0, 4(\sqrt{2}+1))$, abbiamo

$$f'(x) = 2x(x-8)^2 + 2x^2(x-8) = 2x(x-8)(x-8+x)$$
$$= 2x(x-8)(2x-8) = 4x(x-4)(x-8)$$

Se studiamo il segno di f', abbiamo



Quindi $x = 0$ e $x = 8$ sono punti di minimo locale ed assoluto (abbiamo già visto in effetti che $m = f(0) = f(8) = 0$), mentre $x = 4$ è punto di massimo locale

$$f(4) = 4^2 \cdot (4-8)^2 = 4^4 = 256$$

Inoltre osserviamo che

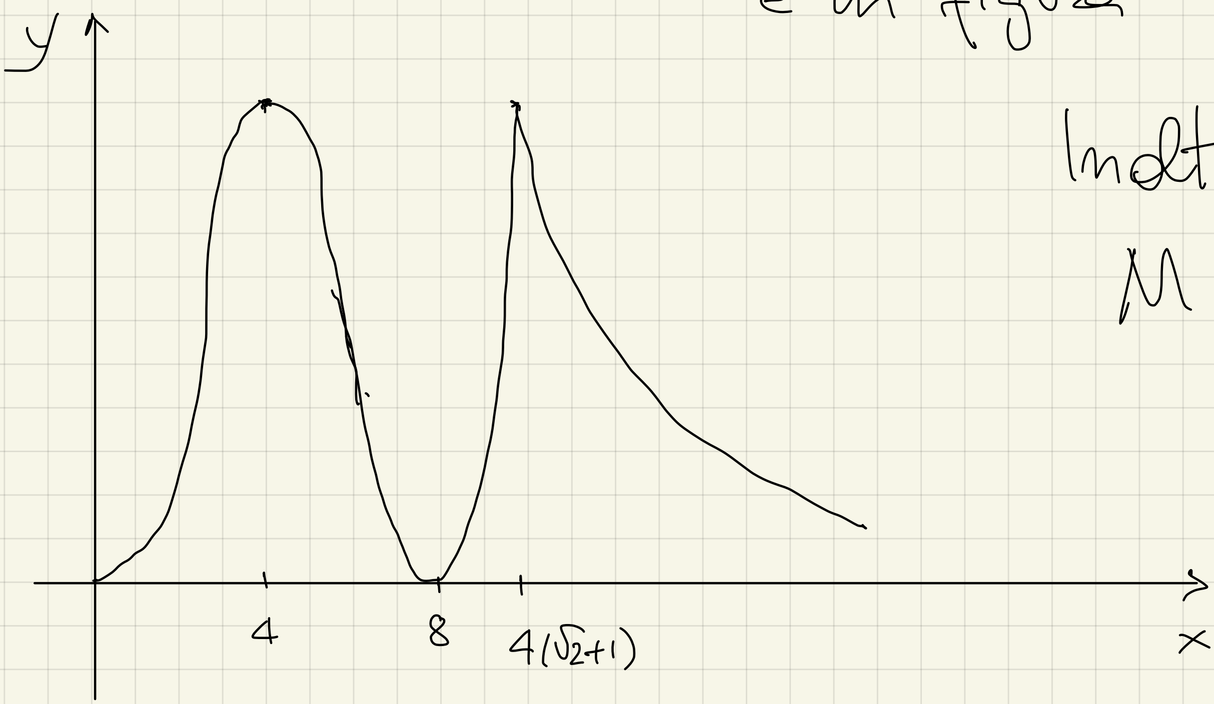
$$\lim_{x \to 4(\sqrt{2}+1)^-} f(x) = \lim_{x \to 4(\sqrt{2}+1)^-} x^2 (x-8)^2 =$$

$$= 16(\sqrt{2}+1)^2 (4\sqrt{2}+4-8)^2 =$$

$$= 16(\sqrt{2}+1)^2 (\sqrt{2}-1)^2 \cdot 16 = 256\left[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right]^2$$

$$= 256$$

Quindi f è continua in $x = 4(\sqrt{2}+1)$ e il massimo $M = 256$, assunto in $x = 4$ e in $x = 4(\sqrt{2}+1)$. Il grafico qualitativo (non in scala) è in figura



Inoltre

$$M + 2m = 256 + 2 \cdot 0$$

$$= 256$$

(7) $F(x) = \int_0^x t^2 \ln(1+t^{10})\,dt$

Se utilizziamo gli sviluppi asintotici, nell'intorno di $t=0$ è

$$\ln(1+t^{10}) = t^{10} + o(t^{10})$$

Pertanto, nell'intorno di $x=0$, avremo

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cdot \left[t^{10} + o(t^{10})\right] dt$$

$$= \int_0^x \left[t^{12} + o(t^{12})\right] dt = \left[\frac{t^{13}}{13} + o(t^{13})\right]_0^x$$

$$= \frac{x^{13}}{13} + o(x^{13})$$

Quindi $F = o(x)$ per $x \to 0$, ossia c)

Osserviamo che $f(t) = t^2 \ln(1+t^{10})$ è pari, quindi $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ è necessariamente dispari (quindi b) è falsa)

Inoltre $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, quindi F non può ammettere asintoto orizzontale (d) è falsa)

Per $t \to +\infty$ $f(t) = t^2 \ln t^{10} = 10t^2 \ln t$

Quindi, per $x \to +\infty$, la primitiva $F(x)$ non può essere $o(x^2)$.

---

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$

La serie converge assolutamente. Dunque deve valere la condizione necessaria di convergenza, ossia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \text{risulta}$$

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

Poiché

$$a_n^2 < \varepsilon^2 \implies a_n^2 - \varepsilon^2 < 0$$

$$\implies (a_n - \varepsilon)(a_n + \varepsilon) < 0$$

$$\implies -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

la risposta corretta è c)

In generale la risposta a) non ha senso, per che' a_n potrebbe essere negativo e in tal caso $\sqrt{a_n}$ non ha senso in campo reale.

Per quanto riguarda b) e d) basta osservare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$ converge, ma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

---

9 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$

$g(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$

Per definizione

$$f(x) = o(x) \text{ per } x \to 0^+ \iff \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$g(x) = o(x) \quad \text{per } x \to +\infty \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

ed anche, operando il cambiamento di variabile

$$x = \frac{1}{t} \qquad \lim_{t \to 0^+} t\, g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$$

che possiamo anche riscrivere $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\, g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{f(x)}{x}\right] \cdot \left[x\, g\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}\right] \cdot \left[\lim_{x \to 0^+} x\, g\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 \cdot 0 = 0.$$

Quindi, la risposta corretta è d).

(10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ finito.

Quindi esiste il limite destro, finito, di f per $x \to x_0$.

Per definizione di limite destro finito

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. se $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

che è proprio la risposta b), che è scritta semplicemente cambiando δ in 2δ.

La risposta d) fa riferimento ad un intorno sinistro, la risposta a) fa riferimento ad un intorno completo; per quanto riguarda c), l'esistenza del limite destro <u>non</u> implica la continuità di f.

---

(11) $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[-a, a]$ e derivabile in $(-a, a)$

Se consideriamo $g : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = (a^2 - x^2)\, f(x)$$

g è continua in $[-a, a]$, derivabile in $(-a, a)$ e $g(a) = g(-a) = 0$. Pertanto soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle e possiamo concludere che $\exists\, c \in (-a, a)$ t.c. $g'(c) = 0$.

Poiché

$$g'(x) = -2x\,f(x) + (a^2-x^2)f'(x)$$

$\exists\ c \in (-a, a)$ t.c.

$$-2c\,f(c) + (a^2-c^2)f'(c) = 0$$

ossia

$$2c\,f(c) = (a^2-c^2)\,f'(c)$$

che è la risposta d)

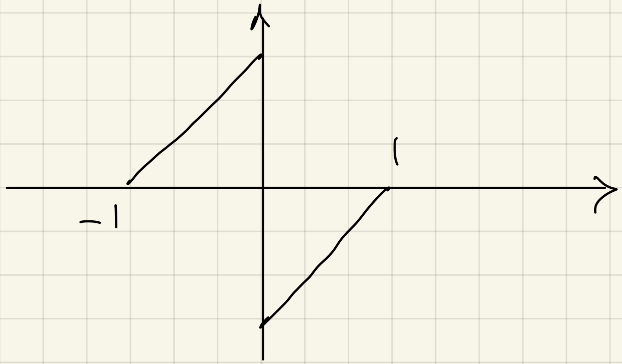
---

(12) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $|f|$ è continua in $[a,b]$

Poiché $|f|$ è continua in $[a,b]$ chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass essa ammette massimo e minimo, ossia è limitata.
Se $|f|$ è limitata, anche f è limitata. La risposta corretta, pertanto, è <u>d)</u>

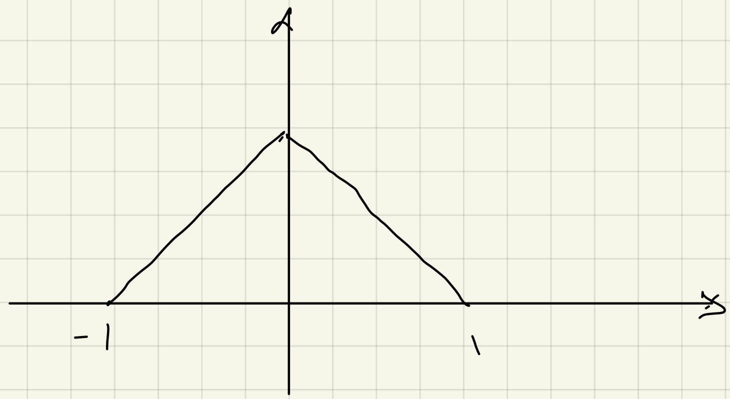
Se consideriamo $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, con

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x \in [-1,0] \\ -1+x & x \in (0,1] \end{cases}$$



è chiaro che

$$|f(x)| = \begin{cases} 1+x & x \in [-1,0] \\ 1-x & x \in (0,1] \end{cases}$$



e l'esempio mostra che a), b) e c) non sono vere.