

A1. * Si consideri la funzione $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; determinare

il massimo e il minimo assoluti e i punti di massimo e di minimo assoluto

• $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2}x < \pi \Leftrightarrow 0 < x < 2$

inutile $+2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ perché esce da $[0, 4]$

• $c = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad f'(x) = e^{-cx} \left(-c \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) = 0$

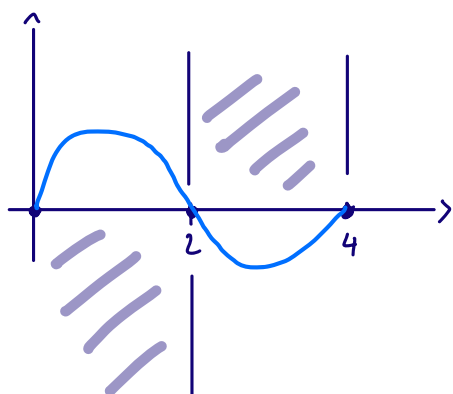
$\hat{=}$

$-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\hat{=}$

$x = \frac{2}{3} + 2k$

$k=0, 1$ altrimenti si esce da $[0, 4]$



dal segno di f si deduce che $x_{\max} = \frac{2}{3}$ e $x_{\min} = \frac{8}{3}$

sostituendo $y_{\max} = e^{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_{\min} = e^{-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -e^{-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2}$

A2. Calcolare per parti il seguente integrale definito: $I = \int_2^6 \frac{\ln(4^2 + t^2)}{t^2} dt$.

$I =$

$$I = \int_2^6 \ln(16+t^2) \frac{1}{t^2} = \left[-\ln(16+t^2) \frac{1}{t} \right]_2^6 - \underbrace{\int_2^6 \frac{2t}{16+t^2} \frac{1}{t} dt}_{I_2}$$

$$I_2 = 2 \int_2^6 \frac{1}{16+t^2} dt = 2 \int_2^6 \frac{1}{16(1+\frac{t^2}{16})} dt = \frac{1}{8} \left[4 \arctan\left(\frac{t}{4}\right) \right]_2^6$$

$$I = \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{1}{t} \ln(16+t^2) \right]_2^6$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \ln(52) + \frac{1}{2} \ln(20)$$

A3. Risolvere in \mathbb{C} , scrivendo le soluzioni in forma esponenziale, l'equazione: $\frac{|z|^3 z^6}{\bar{z}} = 8 \left(+\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad |z|^3 = \rho^3 \quad z^6 = \rho^6 e^{i6\theta} \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta} \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{\rho}$$

$$8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 8 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\rho^3 \rho^6 e^{i6\theta} \rho^{-1} e^{i\theta} = \rho^8 e^{i7\theta} = 8 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho^8 = 8 \quad 7\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \rho = \sqrt[8]{8} \quad \theta = \frac{1}{7}\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} \quad k = 0, \dots, 6$$

A4. Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{\sinh(\alpha x) - \sin(5x)}{\ln(1+2|x|)}$. Siano $\ell^\pm = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x)$.

Determinare il parametro $\alpha > 0$ in modo tale che $\ell^+ - \ell^- = 3$.

$$\sinh(\alpha x) = \alpha x + o(x) \quad \sin(5x) = 5x + o(x)$$

$$\ln(1+2|x|) \sim 2|x|$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(\alpha-5)x + o(x)}{2|x|} \sim \frac{(\alpha-5)}{2} \frac{x}{|x|} = \frac{\alpha-5}{2} \operatorname{sgn}(x)$$

$$\Rightarrow \ell^+ = \frac{\alpha-5}{2} \quad \ell^- = -\frac{\alpha-5}{2}$$

$$\ell^+ - \ell^- = \alpha - 5 = 3 \quad \alpha = 8$$

A5. Determinare il polinomio di Taylor di grado 2 e centrato in $x_0 = 4$ di $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$:

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x-4) + a_2(x-4)^2$$

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) \quad f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$a_0 = f(4) = \ln 3$$

$$a_1 = f'(4) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(4) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{36} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

A6. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 0. \end{cases}$

polinomio caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $\lambda_{1,2} = 2$ con molteplicità 2
 $(\lambda - 2)^2$ (2 radici coincidenti)

soluzione $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$
 $y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$

condizione iniziale

$y(0) = c_1$ $y'(0) = 2c_1 + c_2$

$\begin{cases} c_1 = 2 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -4 \end{cases}$

soluzione $y(x) = 2e^{2x} - 4xe^{2x}$

A7. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\frac{2}{n^{1/2}} - \sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) \right)^3$:

successione a termini positivi perché $x - \sin x \geq 0$ per $x \geq 0$

$\sin z = z - \frac{1}{6}z^3 + o(z^4)$

$z - \sin z = \frac{1}{6}z^3 + o(z^4) \Rightarrow z - \sin z \sim \frac{1}{6}z^3$ per $z \rightarrow 0$

$n^\alpha \left(\frac{2}{n^{1/2}} - \sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) \right)^3 \sim n^\alpha \left(\frac{1}{6} \frac{2^3}{n^{3/2}} \right)^3 = C n^{\alpha - 9/2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\frac{2}{n^{1/2}} - \sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) \right)^3$ si comporta come l'armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{9/2 - \alpha}}$

che converge per $\frac{9}{2} - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{7}{2}$

A8* Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^6 + n^2 + n^{4/3}}{n^{10/3} + 3n^6} \right)^{2n^{8/3}} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} \cos(x) - 1 - (3 - \frac{1}{2})x^2}{\arctan^4(x)} =$

• $a_n = e^{b_n \ln(a_n)}$ $a_n \rightarrow 1$ quindi $a_n = 1 + c_n$ con $c_n \rightarrow 0$

$b_n \ln(a_n) = b_n \ln(1 + c_n) \sim b_n c_n$ attenzione $\ln \sim \beta_n \not\Rightarrow e^{\ln} \sim e^{\beta_n}$

scavo $a_n = 1 + c_n$

$a_n = \frac{\overbrace{3n^6} + \overbrace{n^2} + \overbrace{n^{4/3}} + \overbrace{n^{10/3}} - \overbrace{n^{10/3}}}{n^{10/3} + 3n^6} = 1 + \underbrace{\frac{n^2 + n^{4/3} - n^{10/3}}{n^{10/3} + 3n^6}}_{c_n}$ $b_n = 2n^{8/3}$

$b_n c_n = 2n^{8/3} \frac{n^2 + n^{4/3} - n^{10/3}}{n^{10/3} + 3n^6} \sim 2n^{8/3} \frac{-n^{10/3}}{3n^6} = -\frac{2}{3}$

quindi $b_n \ln(a_n) \sim b_n c_n \rightarrow -\frac{2}{3} \Rightarrow b_n \ln(a_n) \rightarrow -\frac{2}{3} \Rightarrow e^{b_n \ln(a_n)} \rightarrow e^{-2/3}$

• $\arctan z \sim z \Rightarrow \arctan^4 x \sim x^4$

espando il numeratore fino a x^4

$e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$

$e^{3x^2} \cos x - 1 - \frac{5}{2}x^2 = \left(1 + 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) - 1 - \frac{5}{2}x^2$

scrivendo solo i termini di grado ≤ 4

~~$= (1 - 1)$~~

~~$+ \left(-\frac{1}{2} + 3 - \frac{5}{2}\right) x^2$~~

$+ \left(\frac{1}{24} + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}\right) x^4 = \left(\frac{1}{24} + \frac{108}{24} - \frac{36}{24}\right) x^4 = \frac{73}{24} x^4$

$\frac{e^{3x^2} \cos x - 1 - \frac{5}{2}x^2}{\arctan^4(x)} \sim \frac{\frac{73}{24} x^4}{x^4} = \frac{73}{24}$

B4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ per $t \rightarrow +\infty$. Allora A $f(e^x) \sim \frac{1}{e^x}$ per $x \rightarrow +\infty$.

B $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$. C $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right) = f(1)$. D $f(e^x) = o(e^{-x})$ per $x \rightarrow +\infty$.

$$f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{1/t} = t f(t) \rightarrow 0 \quad \text{esclude } \boxed{B}$$

cambio variabile $t = e^x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{f(e^x)}{e^{-x}} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ D
esclude A

CONTRO-ESEMPIO

cambio variabile $t = \frac{x^2+1}{x^2+4} \rightarrow 1^-$ per $x \rightarrow +\infty$

f non continua da sx esclude C

B5. Sia (a_n) una successione di numeri reali strettamente negativi. Allora: A $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste sempre (finito o infinito). B $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n > -\infty$. C Se a_n è crescente, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste finito.

D $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n$ non esiste.

a_n crescente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$, impossibile perché $a_n < 0$ C

CONTRO-ESEMPIO

$$a_n = 2 + (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ pari} \\ -3 & n \text{ dispari} \end{cases} \quad \text{esclude } \boxed{A}$$

$$a_n = -n \quad \text{esclude } \boxed{B}$$

$$a_n = -\frac{1}{n} \quad \text{esclude } \boxed{D}$$

B6. Siano $f(x) = 2 - 3x + o(x)$ e $g(x) = 1 + 3x + x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Sia $h(x) = f(x^3) - g(x^2)$. Allora il polinomio di Taylor-MacLaurin di ordine 3 per h è A $p(x) = 1 - 3x - 3x^2 + x^4$.

B $p(x) = 1 + x - 3x^2$. C $p(x) = 1 + x - 3x^2 + x^4$. D $p(x) = 1 - 3x^2 - 3x^3$.

$$f(x^3) = 2 - 3x^3 + o(x^3) \quad g(x^2) = 1 + 3x^2 + x^4 + o(x^4)$$

$$h(x) = 1 - 3x^2 - 3x^3 - x^4 + o(x^3) + o(x^4) = 1 - 3x^2 - 3x^3 + o(x^3) \quad \boxed{D}$$

perché $x^4 = o(x^3)$

B7. * Sia (a_n) una successione reale, tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Allora, detta $b_n = \max\{a_n, 0\}$ e $c_n = \max\{-a_n, 0\}$:

A Se $a_n \leq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ non converge. B $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ non converge. C $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge. D Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases}$$

• $a_n \geq 0 \Rightarrow b_n = a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge D

• $a_n \leq 0 \Rightarrow c_n = -a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge esclude A e B

• $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ esclude C

B8. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e crescente. Sia $I(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora I è A decrescente. B convessa. C crescente. D concava.

TEOR FUNZIONE INTEGRALE $\Rightarrow I$ derivabile e $I'(x) = f(x)$

$I' = f$ crescente $\Rightarrow I$ convessa B

CONTRO-ESEMPI

$f(t) = 1 \Rightarrow I(x) = x+1$ esclude A

$f(t) = -1 \Rightarrow I(x) = -(x+1)$ esclude C

$f(t) = t \Rightarrow I(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ esclude D