

DOMANDA 11

$$I = \int_{\log 18}^{\log 24} \frac{6^2 e^x}{e^{2x} - 18e^x + 72} dx, \text{ calcolare } \frac{I}{\log \frac{4}{3}}$$

Cambio variabile $y = e^x \quad dx = \frac{dy}{y}$

$$I = \int_{18}^{24} \frac{36 y}{y^2 - 18y + 72} \frac{dy}{y} = \text{teoria integrazione funzioni razionali fratte}$$

$$y^2 - 18y + 72 = 0 \quad y = 9 \pm \sqrt{81 - 72} = 9 \pm 3 \rightarrow \begin{matrix} 12 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\frac{36}{(y-6)(y-12)} = \frac{A}{y-6} + \frac{B}{y-12} = \frac{(A+B)y - 12A - 6B}{(y-6)(y-12)}$$

$$1) A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$2) -12A+6A=36 \Rightarrow A=-6 \Rightarrow B=6$$

$$I = \int_{18}^{24} -\frac{6}{y-6} + \frac{6}{y-12} dy = -6 \log(y-6) \Big|_{18}^{24} + 6 \log(y-12) \Big|_{18}^{24}$$

$$= -6 \log 18 + 6 \log 12 + 6 \log 12 - 6 \log 6 =$$

$$= -6 \cancel{\log 6} - 6 \log 3 + 12 \cancel{\log 6} + 12 \log 2 - 6 \cancel{\log 6}$$

$$= -6 \log 3 + 6 \log 4 = 6 \log \frac{4}{3}$$

$$\frac{I}{\log \frac{4}{3}} = 6.$$

DOMANDA 2 $\begin{cases} u'(t) + \frac{1}{4}u(t) = t \\ u(-1) = 0 \end{cases}$ Calcolare $u(0) - 20e^{-\frac{1}{4}}$

Individuando $A(t) = \int_{-1}^t \frac{1}{4} ds = \frac{t+1}{4}$ e si ha che

$$u(t)e^{A(t)} - u(-1)e^{A(-1)} = \int_{-1}^t \frac{d}{dt}(u(t)e^{A(t)}) dt =$$

$$= \int_{-1}^t s e^{A(s)} ds = 4s e^{\frac{s+1}{4}} \Big|_{-1}^t - 4 \int_{-1}^t e^{\frac{s+1}{4}} ds =$$

$u = s \quad u' = 1$
 $v = 4e^{\frac{s+1}{4}} \quad v' = e^{\frac{s+1}{4}}$

PER PARTI

$$= 4te^{\frac{t+1}{4}} + 4 - 16e^{\frac{t+1}{4}} \Big|_{-1}^t = 4te^{\frac{t+1}{4}} + 4 - 16e^{\frac{t+1}{4}} + 16$$

Quindi $u(t) = e^{-(\frac{t+1}{4})} (4te^{\frac{t+1}{4}} + 20 - 16e^{\frac{t+1}{4}}) = 4t - 16 + 20e^{-(\frac{t+1}{4})}$

e $u(0) - 20e^{-\frac{1}{4}} = -16 + 20e^{-\frac{1}{4}} - 20e^{-\frac{1}{4}} = -16$

DOMANDA 3 $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 5n^2} - \sqrt[3]{n^3 + n}}{n - \sqrt{n^2 - \frac{n}{6}}}$, calcolare $\frac{3}{2}l$

ricordando che $(1 + \frac{1}{n})^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$ per $n \rightarrow +\infty$, calcoliamo

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \{ (1 - \frac{5}{n})^{1/3} - (1 + \frac{1}{n^2})^{1/3} \}}{n \{ 1 - (1 - \frac{1}{6n})^{1/2} \}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{3n} + o(\frac{1}{n}) - 1 - \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{1 - 1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{5}{3} + o(1)}{\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})} = -20. \quad \text{Quindi } \frac{3}{2}l = -30.$$

DOMANDA 4 | $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x+2}{x}\right) + \log\left(\frac{x+2}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

e sia x_m il suo punto di minimo assoluto.

Calcolare $4f(x_m)$.

Per prima cosa notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{x+2}{x}\right) + \log\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x+2}{x}\right) + \log\left(\frac{x+2}{x}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Notiamo che dunque f è discontinua in $x=0$, e continua e differenziabile (e regolare C^∞) in $(0, +\infty)$

Calcoleremo la derivata prima in $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x}\right)^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{x - (x+2)}{x^2}}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\frac{-2}{x^2}}_{\leq 0} \leq 0$$

Dunque f è decrescente in $(0, +\infty)$ e ha limite $\frac{\pi}{4}$ e $+\infty$,
perciò $f(x) \geq \frac{\pi}{4} \quad \forall x \neq 0$. Siccome $f(0) = \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$

il punto di minimo è $x_m = 0$ e $4f(x_m) = 2$.

DOMANDA 5 | $S = \{ \text{soluzioni in } \mathbb{C} \text{ di } e^{5zi} - 1 = 0 \}$

$S' = S \cap [0, \frac{6\pi}{5}]$ e $\sigma = \sum_{z \in S'} z$, calcolare $\frac{12\pi}{\sigma}$

invece $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ dunque $5iz = -5y + 5xi$

abbiamo $e^{-5y} e^{5xi} = 1 = e^{i0}$ con $\rho = 1 \quad \theta = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow e^{-5y} = 1 \Rightarrow -5y = 0 \Rightarrow y = 0. \quad \left. \begin{array}{l} 5x = 2k\pi \\ \Rightarrow x = \frac{2}{5}k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \left\{ z = x + iy : \begin{array}{l} y = 0 \\ x = \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$S' = \left\{ 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi \right\} = S \cap [0, \frac{6\pi}{5}] \quad \text{quindi} \quad \sigma = \frac{13}{5}\pi$$

$$\text{e } \frac{12\pi}{\sigma} = 5$$

DOMANDA 6 | Sia $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x \cos x - \sin x)}{(e^{5x^2} - 1) \sinh x}$, si calcoli $15L$

ricordiamo $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$

$\sinh x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{(5x^2 + o(x^2))(x + o(x))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(-\frac{x^3}{2} + o(x^3))}{5x^3 + o(x^3)} = -\frac{4}{15}$$

$15L = -4$.

DOMANDA 7 | {a_n} succ. di numeri > 0 t.c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{1+n} < +\infty$.

Controesempio alla (a) : $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{se } n=1 \\ \frac{1}{n^2} & \forall n \geq 2 \end{cases}$ chiaramente è decrescente

e $\frac{a_n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ per termine confronto la serie converge

Lo stesso esempio è controesempio per (c) : $\sum \frac{1}{n} = +\infty$!

e anche alla (d) $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$ (i valori a_0, a_1 non contano nulla per la convergenza!)

Si controlla che (b) è la risposta esatta, fissiamo $\varepsilon > 0$ (e < 1) e siccome $\frac{a_n}{1+n}$ deve essere infinitesimo, troviamo $\bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad \left| \frac{a_n}{1+n} \right| \leq \varepsilon$.

Riscriviamo il tutto come $-\varepsilon \leq \frac{1}{1+n} a_n \leq \varepsilon$ ovvero

$1-\varepsilon \leq \frac{1}{1+n} \leq 1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} \leq 1+n \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} - 1 \leq a_n \leq \frac{1}{1-\varepsilon} - 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq a_n \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ cioè $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ quindi

$a_n \rightarrow 0$

DOMANDA 8 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f > 0$

$$F(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

Notiamo subito che per teorema fondamentale calcolo integrale

$$F'(x) = f(x) > 0 \quad \forall x \in [0, +\infty) \quad (F \in C^1 \text{ per prop. funzione integrale})$$

Immediato che (a) è falsa e (d) è vera

(b) è falsa perché non sappiamo che $f \in C^1$, ma solo che è continua

(c) è falsa perché se $f \equiv 1$ ad esempio, si ha $F > 0$ sempre

DOMANDA 9 $f(x) = o(x-1)$ per $x \rightarrow 1$ $g(x) = o((x-1)^2)$ per $x \rightarrow 1$

Prendiamo $f(x) = (x-1)^{3/2}$ e $g(x) = (x-1)^{5/2}$

abbiamo un controesempio per la (a): $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{(x-1)^4} = 1$

per la (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{-1}$ ~~non esiste~~

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^{-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{-1} = +\infty \right)$$

e quindi anche per la (d).

Si verifica che la (b) è la risposta esatta dalla def. di

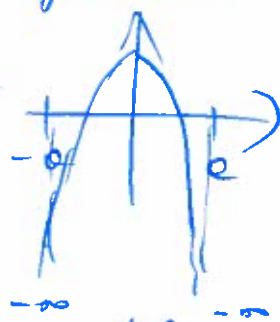
o piccolo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{f(x)}{x-1}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{g(x)}{(x-1)^2}}_{\downarrow 0} = 0.$$

DOMANDA 10 | $f: (-a, e) \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $(-a, e)$ e con
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

È chiaro che la (b) è falsa, visto che il limite agli estremi è $-\infty$
 pure la (c) è falsa, visto che f potrebbe fare

Anche (d) è falsa perché f potrebbe essere
 sempre strettamente negativa



La (a) è vera e si dimostra con una versione del
 teorema di Weierstraß,

DOMANDA 11 | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 , $f(1) = 0$

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = f(1) = 0$ non ha senso

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ non è vero perché non sappiamo che $f(0) = 0$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f(1)$ è falsa perché il risultato
 dovrebbe essere $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \neq 0$

Infine la (c) è corretta perché, col cambio di variabile $y = \log x$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\log x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(e^y) - f(1)}{y - \log 1} = \frac{d}{dy} f(e^y) \Big|_{y=0} = f'(1) \cdot e^0 = f'(1).$$

Questo perché $f \circ e^y$ è
 una funzione C^1 , grazie alla regolarità di f ed al
 fatto che l'esponenziale è C^∞ .

DOMANDA 12 | $T(x) = 1 + 8x$ la tangente a f in $x_0 = 1$

Si che $T(x) = f(1) + f'(1)(x-1) \Rightarrow f'(1) = 8$ $f(1) = 9$

e si vede che è corretta la (a) e falsa la (b)

La (c) ha $\sigma(x)$ invece che $\sigma(x-1)$ e la (d) ha il grado errato.