

PARTI A

① Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 7^n}}{\left(1 + \arctan\left(\frac{2}{n}\right)\right)^n}$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 7^n}}{\left(1 + \arctan\left(\frac{2}{n}\right)\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{7^n}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2} = \frac{7}{e^2}$$

Calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \cos x}{7x^2 \sin \frac{1}{x}} + 4x \arctan(e^x \ln|x|)$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \cos x}{7x^2 \sin \frac{1}{x}} + 4x \arctan(e^x \ln|x|)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{7x^2 \cdot \frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x (e^x \ln|x|)$$

$$= \frac{2}{7}$$

② Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh n \left[\tanh\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\alpha n}}{\sinh n \left[\left(1 + \frac{8}{n}\right)^8 - 1 \right]^\alpha}$$

Abbiamo

$$a_n = \frac{\cosh n \left[\tanh\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\alpha n}}{\sinh n \left[\left(1 + \frac{8}{n}\right)^8 - 1 \right]^\alpha} \quad \text{vs} \quad (\text{per } n \rightarrow +\infty)$$

$$u = \frac{\frac{e}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{8\alpha}}{\frac{e}{n} \left[1 + 8 \cdot \frac{8}{n} \cdot 1\right]^\alpha} = \frac{1}{64^\alpha n^{8\alpha - 1}} = \frac{1}{64^\alpha} \frac{1}{n^{7\alpha}}$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie converge

$$s \quad 7\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha > \frac{1}{7}}$$

③ Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = 6 \ln(\sin 6x + \arctan e^x - \arctan 1 + 6e^x)$$

nel punto di ascisse $x_0 = 0$.

Risolve

$$\begin{aligned} f(0) &= 6 \ln(0 + \arctan 1 - \arctan 1 + 6) \\ &= 6 \ln 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \frac{1}{\sin 6x + \arctan e^x - \arctan 1 + 6e^x} \cdot \\ &\quad \cdot \left(6 \cos 6x + \frac{e^x}{1+e^{2x}} + 6e^x \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{6}{0 + \cancel{\arctan 1} - \cancel{\arctan 1} + 6} \cdot \left(6 + \frac{1}{2} + 6 \right) \\ &= 1 \cdot \frac{25}{2} \end{aligned}$$

Quindi, la retta tangente ha equazione

$$y - 6 \ln 6 = \frac{25}{2} x$$

- ④ Scrivere il polinomio di Taylor/Mac-Laurin di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = 7x^2 + \ln\left(\frac{1}{2+x^2}\right)$

Osserviamo che $7x^2$ è già un polinomio di grado 2.

Quindi basta sviluppare $\ln\left(\frac{1}{2+x^2}\right)$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{2+x^2}\right) &= -\ln(2+x^2) \\ &= -\ln 2 - \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Poiché

$$\ln(1+t) = t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

avremo

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Pertanto, il polinomio cercato è

$$\begin{aligned}P_2(x; 0) &= 7x^2 - \ln 2 - \frac{x^2}{2} \\ &= -\ln 2 + \frac{13}{2}x^2\end{aligned}$$

Allo stesso risultato, ovviamente, si arriva calcolando i valori di $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ e ricordando che

$$P_2(x; 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

- ⑤ Risolvere in $\mathbb{C}$ $(z-2)^2 - 2i = 0$ e scrivere le soluzioni in forma esponenziale. Abbiamo

$$z = 2 + \sqrt{2i}$$

Inoltre

$$2i = 2 e^{i \frac{\pi}{2}}$$

Pertanto

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2} e^{i \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} \right)}$$

con $k=0,1$,

ossia

$$(\sqrt{2i})_0 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$(\sqrt{2i})_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

Conseguentemente

$$z_0 = 2 + \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = 2 + \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ $z^2 + 2iz + 4 = 0$

Abbiamo

$$z = -i \pm \sqrt{1-4}$$

$$= -i \pm \sqrt{5}i$$

⑥ Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\sin t) y' = (\cos t) y + 7 \sin^4 t \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7\pi \end{cases}$$

Abbiamo

$$y' = \frac{\cos t}{\sin t} y + 7 \sin^3 t$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 y &= e^{\int \frac{\cos t}{\sin t} dt} \left[C + \int 7 \sin^3 t e^{-\int \frac{\cos t}{\sin t} dt} dt \right] \\
 &= e^{\ln |\sin t|} \left[C + \int 7 \sin^3 t e^{-\ln |\sin t|} dt \right] \\
 &= |\sin t| \left[C + 7 \int \frac{\sin^3 t}{|\sin t|} dt \right]
 \end{aligned}$$

Scaricando i moduli nella costante arbitraria, abbiamo

$$\begin{aligned}
 y &= \sin t \left[C + 7 \int \sin^2 t dt \right] \\
 &= \sin t \left[C + 7 \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \right] \\
 &= \sin t \left[C + \frac{7}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo

$$7\pi = 1 \left[C + \frac{7}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right]$$

$$C = \frac{3}{4} \cdot 7\pi = \frac{21}{4}\pi$$

Quindi

$$y = \frac{21}{4}\pi \sin t + \frac{7 \sin t}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)$$

⑦ Data $f: \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \arcsin 2x - \sqrt{4x^2 - \frac{1}{4}} + \frac{2}{3}\pi$$

determinare l'ascissa del punto di minimo assoluto e il valore del limite.

Avremo

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - \frac{1}{4}}}$$

La disequazione $f'(x) \geq 0$ si traduce in

$$\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \geq \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$4\left(4x^2 - \frac{1}{4}\right) \geq 16x^2(1-4x^2)$$

$$\cancel{16x^2} - 1 \geq \cancel{16x^2} - 64x^4$$

$$64x^4 - 1 \geq 0$$

$$(8x^2 - 1)(\cancel{8x^2 + 1}) \geq 0$$

$$(2\sqrt{2}x - 1)(\cancel{2\sqrt{2}x + 1}) \geq 0$$

Sempre positivo in $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

$$x \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Pertanto

$$x_m = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} m &= \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \frac{2}{5}\pi \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\pi. \end{aligned}$$

Risolvere con opportuna sostituzione l'integrale

$$I = \int_{2^{10}}^{2^{20}} \frac{\sqrt{\log_2 x - 2}}{x} dx$$

Poniamo

$$\log_2 x = t$$

$$x = 2^t = e^{t \ln 2}$$

$$dx = \ln 2 e^{t \ln 2} dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = \ln 2 dt$$

$$x = 2^{10} \longrightarrow t = 10$$

$$x = 2^{20} \longrightarrow t = 20$$

Perciò, otteniamo

$$I = \int_{10}^{20} \sqrt{t-2} (\ln 2) dt = \ln 2 \cdot \frac{2}{3} (t-2)^{3/2} \Big|_{10}^{20}$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 \left((18)^{3/2} - (8)^{3/2} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 \cdot 2^{3/2} [27 - 8]$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln 2 \cdot 19$$

PARTIE B

B1) $P_2(x; 4) = x^2 + 4x + 6$

Dalla teoria sappiamo che

$$f(4) = P_2(4), \quad f'(4) = P_2'(4), \quad f''(4) = P_2''(4)$$

Pertanto

$$f(4) = 16 + 16 + 6 = 38$$

$$f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow f'(4) = 12$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(4) = 2$$

È evidente che $f(4) \rightarrow f'(4)$, quindi la risposta corretta è [C].

B2] $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua perché è la composizione di funzioni continue. Inoltre è sicuramente limitata, perché $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin t| \leq 1$.
Pertanto la risposta corretta è [D].

B3] Osserviamo che, poiché $f(0)g(0) = 0$, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x - 0}$$

che è il rapporto incrementale che definisce la derivata prima del prodotto $f(x)g(x)$. Tale derivata esiste certamente per le ipotesi. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x} = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) \quad \text{che}$$

è la risposta [A]

B4] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n + \cos(n\pi) \sin n = +\infty$

dal momento che

$$-1 \leq \cos(n\pi) \sin n \leq 1$$

Quindi la risposta corretta è B

B5

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

Per il Teorema della media, esiste $c \in (-1, 1)$,
tale che

$$f(c) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt$$

cioè

$$2f(c) = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

Per costruzione $\int_{-1}^1 f(t) dt = F(1)$.

Pertanto

$$F(1) = 2f(c)$$

e la risposta corretta è D

B6 Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente, ne

segue che ~~essie~~ $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ed esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$

t.c. $\forall n \geq \bar{n}$ risulta $|a_n| < 1$.

Pertanto $\forall n \geq \bar{n}$

$$a_n^2 = |a_n|^2 < |a_n|$$

e per il criterio del confronto possiamo concludere che

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, che è la risposta **[C]**

B7) Per il Teorema di Lagrange, esiste $\xi \in (1, 4)$

t.c. $f'(\xi) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} > 0$ perché $f(4) > f(1)$

cioè $f'(\xi) > 0$

La risposta corretta è **[A]**

B8)
$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{\sin n + n^{e/5}} = \frac{(-1)^n}{\sin n + n^{e/5}}$$

Perché $\frac{e}{5} < 1$, la serie converge semplicemente, ma non assolutamente. La risposta corretta è **[B]**