

A1 $2u''(t) + 8u'(t) + 6u(t) = 2(t+1)$. Divido tutto per 2:

$$u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = (t+1).$$

Soluzioni eq. omogenee: pol. caratteristico $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$u_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Sol. particolare del tipo $u_p(t) = At + B$

(si noti che $0 \neq -1, -3$)

$$u_p'(t) = A \quad u_p''(t) = 0. \quad \text{Sostituisco che } u_p \text{ risolve l'equazione}$$

$$4A + 3(At + B) = t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} + 3B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3B = 1 - \frac{4}{3}$$

$$B = -\frac{1}{9}$$

Quindi $u_p(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$

Tutte le sol: $u(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$.

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A2) $z^8 = \left(\frac{3+3i}{2-2i} \right)^{16}$

Risolvo con forme
esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \rho > 0$$

$$z^8 = \rho^8 e^{i8\theta} \quad \text{OK}$$

$$\left(\frac{3+3i}{2-2i} \right)^{16} = \left(\frac{3}{2} \right)^{16} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{16} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{16} \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} \right)^{16} = \left(\frac{3}{2} \right)^{16} \frac{(\sqrt{2}+i)^{32}}{2^{16}}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{16} \frac{(\sqrt{2})^{32}}{2^{16}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)^{32} = \left(\frac{3}{2} \right)^{16} e^{i\frac{\pi}{4} \cdot 32}$$

$\cos \frac{\pi}{4} \quad \sin \frac{\pi}{4}$

$$\rho^8 e^{i8\theta} = \left(\frac{3}{2} \right)^{16} e^{i(8\pi + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^8 = \left(\frac{3}{2} \right)^{16} \Rightarrow \rho = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \\ \theta_k = \pi + \frac{k\pi}{4} \end{array} \right.$$

$k = 0, 1, \dots, 7$

Quindi le soluzioni sono

$$z_k = \frac{9}{4} e^{i\theta_k}$$

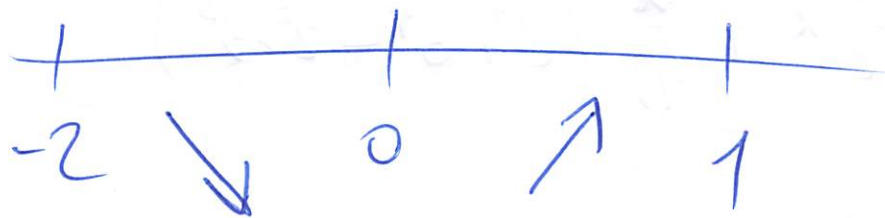
$$\theta_k = \pi + \frac{k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

A3) $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2 \arctan\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)$
 f è derivabile $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{4x(2x^2+1) - 2x(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}$

$$= \frac{2}{1 + \left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{8x}{(2x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0 \in [-2, 1]$ Unico pto stazionario
 $x_0 = 0$.

Notiamo che $f' > 0$ in $(0, 1)$, $f' < 0$ in $(-2, 0)$
 quindi f è crescente in $(0, 1)$, decrescente in $(-2, 0)$



Di conseguenza $x_0 = 0$ è punto di minimo assoluto
 per f . $\min = f(0) = 2 \arctan(-1) = -\pi/2$

Dove può stare il massimo di f ? Agli estremi,
 quindi confronto $f(-2) = 2 \arctan(7/9)$
 $f(1) = 2 \arctan(1/3)$

Siccome $\frac{1}{3} < \frac{7}{9}$ e $\arctan$ crescente $\Rightarrow f(1) < f(-2)$
 $\Rightarrow x_{\max} = -2$ e $\max = f(-2) = 2 \arctan(7/9)$

A4) $f(x) = \cos(2\sqrt{x}) \cosh(3\sqrt{x})$

~~Pol~~ Pol Taylor 2° ordine centrato in $x_0 = 0$

$$P_2^{\cos(\sqrt{x})}(x_0) = 1 - \frac{(2\sqrt{x})^2}{2} + \frac{(2\sqrt{x})^4}{4!}$$

$$P_2^{\cosh(\sqrt{x})}(x_0) = 1 + \frac{(3\sqrt{x})^2}{2} + \frac{(3\sqrt{x})^4}{4!}$$

Quindi facendo il prodotto

$$P_2^f(x_0) = \left(1 - \frac{4x}{2} + \frac{2^4 x^2}{4!}\right) \left(1 + \frac{9x}{2} + \frac{3^4 x^2}{4!}\right)$$

$$= 1 + \frac{9}{2}x - \frac{4}{2}x + \frac{2^4}{4!}x^2 + \frac{3^4}{4!}x^2 - 9x^2$$

$$= 1 + \frac{5}{2}x + \frac{x^2}{4!} (2^4 + 3^4 - 2^3 \cdot 3^3)$$

A5) $f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{7x^2}{x^2+2}\right)}{x} \quad x \neq 0$

• prolungamento in 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{7x^2}{x^2+2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{7x^2}{x^2+2}\right)}{x} = 0$$

quindi il prolungamento continuo è

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{7x^2}{x^2+2}\right)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

• Per comodità chiameremo ancora $\hat{f}$ il prolungamento $\hat{f}$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{7h^2}{h^2+2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h^2}{h^2+2} \cdot \frac{1}{h^2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

• $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad h(x) = g(f(x)) = \frac{2f(x)}{f(x)+1}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) & h'(0) &= g'(f(0)) \cdot f'(0) = \\ & & &= g'(0) f'(0) \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(0) = 2$$

$$\Rightarrow h'(0) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7.$$

A6
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^{1/2}}\right) (e^{n^{-\alpha}} - 1)}{n^{1/3} + \sin(e^{\alpha n})} = a_n$$

Notiamo subito che se $\alpha \leq 0$ $a_n \not\rightarrow 0$, quindi la serie non può convergere,

Se $\alpha \geq 0$ uso confronto asintotico: per $n \rightarrow +\infty$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^{1/2}}\right) \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$e^{n^{-\alpha}} - 1 \sim n^{-\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$n^{1/3} + \sin(e^{\alpha n}) \sim n^{1/3} \quad (\text{poiché } \sin(e^{\alpha n}) \in [-1, 1])$$

Quindi basta studiare la convergenza della serie

$$\sum \frac{\frac{1}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}}{n^{1/3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + \alpha + \frac{1}{3}}} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11}{26}$$

A7) $f(x) = 2 \left(e^{-7 \sin x} - \alpha \right) x^2$

Nota che $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow e^{-7} \leq e^{-7 \sin x} \leq e^7$
 $z \mapsto e^z$ crescente
 $z \mapsto e^{-z}$ decrescente

Se $\left(e^{-7 \sin x} - \alpha \right) > 0 \forall x$ allora è chiaro

che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{2 \left(e^{-7 \sin x} - \alpha \right) x^2}_{> 0 \forall x} = +\infty$

In particolare se $e^{-7 \sin x} - \alpha \geq e^{-7} - \alpha > 0$

cioè se $\alpha < e^{-7}$ ho quanto richiesto,

Si noti che, se $\alpha \in [e^{-7}, e^7]$ allora

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{2 \left(e^{-7 \sin x} - \alpha \right) x^2}_{\text{questo termine oscilla!}} \text{ NON ESISTE}$

Infine, se $\alpha > e^7$, allora

$$e^{-7 \sin x} - \alpha \leq e^7 - \alpha < 0$$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{2 \left(e^{-7 \sin x} - \alpha \right) x^2}_{< 0 \forall x} = -\infty$

A8

$$\int_0^1 (2x+1) \sin(8x) dx = \text{PARTI}$$

$$= (2x+1) \left(-\frac{\cos(8x)}{8} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{8} \cos(8x) dx$$

$$\left| \begin{array}{l} F = -\frac{\cos(8x)}{8} \\ G = 2x+1 \end{array} \right| \begin{array}{l} F' = \sin(8x) \\ G' = 2 \end{array}$$

$$= -\frac{3}{8} \cos 8 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \frac{\sin(8x)}{8} \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{3}{8} \cos 8 + \frac{1}{8} + \frac{\sin 8}{32}$$

B1 Se $a_n \rightarrow +\infty$ allora per definizione

$\forall M > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$ vale

$a_n \geq M$ equivalente a $-a_n \leq -M$

Risposta esatta [D]

B2 $f(x) = \sinh \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$

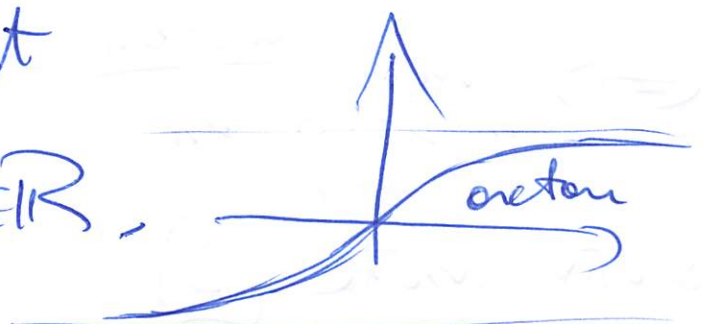
$$f'(x) = \underbrace{\left(\cosh \frac{1}{x^2} \right)}_{>0} \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right) \Rightarrow \begin{aligned} f' &\geq 0 \text{ in } (-\infty, 0) \\ f' &\leq 0 \text{ in } (0, +\infty) \end{aligned}$$

Quindi f è monotona CRESCENTE in $(-\infty, 0)$

Risposta esatta [D]

B3 $F(x) = \int_0^x \operatorname{arctan} t \, dt$

$$F'(x) = \operatorname{arctan} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Come è ben noto $\operatorname{arctan} x = 0$ solo in $x_0 = 0$

$\Rightarrow \exists! x_0$ t.c. $F'(x_0) = 0$ pto stazionario

Risposta esatta [C]

B4) $f(x) = 2 - \tanh x \quad x \in \mathbb{R}$

chi è l'immagine di f ? È ben noto che

$$\text{Im}(\tanh) = (-1, 1) \Rightarrow \text{Im} f = (1, 3).$$

Quoltre $\tanh$ è strett. crescente, poiché f è strett. decrescente.

$$\sqrt{3} \in (1, 3) \text{ e } f \text{ strett. decr} \Rightarrow \exists! x_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x_0) = \sqrt{3}$$

Risposta esatta D

(si noti che $\pi \notin (1, 3)$!!)

B5) $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ vuol dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0 \Leftrightarrow a_n - b_n = o(b_n) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Risposta esatta D

Controesempio ad A, C: $a_n = n^2 + n \quad b_n = n^2$

Controesempio a B: $a_n = b_n = (-1)^n$

B6 $P_3(x,0) = 1 + x + x^2 + x^3$

$f(0) = P_3(0,0) = 1$

$f'(0) = P_3'(0,0) = 1$

$f''(0) = P_3''(0,0) = 2$

$f'''(0) = P_3'''(0,0) = 6$

Si noti che sicuramente il polinomio di Taylor in 0 NON PUO' DARE INFORMAZIONI sulla funzione in 1 !!!

risposta esatta D

B7 $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ($\Rightarrow$ continua)

Per Weierstraß f ha massimo e minimo su $[a,b]$.

In particolare $\exists c \in [a,b]$ t.c. $f(x) \geq f(c) \forall x \in [a,b]$
 $\downarrow$
 pto di minimo.

risp esatte B

Controesempio ad A, D

$f(x) = x$

Controes a C



B8 $|a_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ definitivamente.

Se $\alpha > 1$, per confronto

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Rightarrow \sum |a_n| < +\infty$$

Conv. convergenza assoluta $\Rightarrow \sum a_n < +\infty$.

risposta esatta $\boxed{A}$