PARTE A

① Per la continuità di f in $[0,1)$, è sufficiente verificare la continuità in $x=0$, ossia scegliere α t.c.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$$

(Infatti, per la sua definizione, la f è continua in $(0,1)$)

Poiché il limite per $x \to 0$ è dato da

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(3x^4) + \ln(1+3x)}{2\cos x} + \frac{2\cosh x^4}{e^{1+x^2} - \sin x^2} = \frac{2}{e}$$

è chiaro che dovrà essere

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{e}}$$

Per la derivata in $x=0$, dobbiamo calcolare

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 2/e}{h}.$$

Abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sin 3h^4 + \ln(1+3h)}{2\cosh} + \dfrac{2\cosh \cancel{k}^4}{e^{1+h^2} - \sin h^2} - \dfrac{2}{e}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h^4 + o(h^4) + 3h + o(h)}{h\left[2 - h^2\right]} +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2\left[1 + \dfrac{h^4}{2} + o(h^4)\right]}{e\left(1+h^2+o(h^2)\right) - h^2 + \dfrac{h^6}{6}} - \frac{2}{e}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2e} + eh^4 - 2e(\cancel{1}+h^2) + 2h^2}{eh\left[e(1+h^2) - h^2\right]} =$$

$$= \frac{3}{2} + \lim_{h \to 0} \frac{(-2e+2)h^{\cancel{2}}}{e^2\cancel{h} + e^2h^{\cancel{3}2} - eh^{\cancel{3}2}} = \frac{3}{2}$$

Quindi

$$f'(0) = \frac{3}{2}$$

---

(2) $$f(x) = \begin{cases} 7x^2 \ln^2 \frac{2}{x} & 0 < x \leq 2 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 7x^2 \ln^2 \frac{2}{x} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 7 \cdot 2^2 \ln^2 \frac{2}{2} = 0.$$

Inoltre

$$\forall x \in [0,2] \qquad f(x) \geq 0$$

Pertanto, sicuramente

$$x = 0 \qquad e \qquad x = 2$$

sono punti di minimo, sia locale, sia assoluto

è $$\boxed{m = f(0) = f(2) = 0}.$$

Per determinare il massimo, passiamo al calcolo della derivata. Abbiamo

$$f'(x) = 14x \ln^2 \frac{2}{x} + 7x^{\cancel{2}} \cdot 2 \ln \frac{2}{x} \left(-\frac{1}{\cancel{x}}\right)$$

$$= 14x \left(\ln \frac{2}{x}\right) \cdot \left(\ln \frac{2}{x} - 1\right)$$

Studiando in $(0,2)$ la disequazione $f'(x) \geq 0$ abbiamo

$$\underbrace{14x\left(\ln\frac{2}{x}\right)}_{\grave{e}>0}\cdot\left(\ln\frac{2}{x}-1\right)\geq 0$$

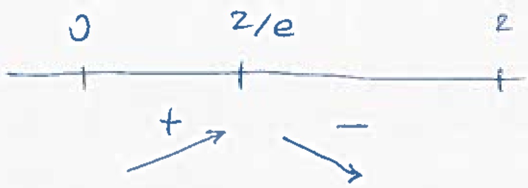
$$\Longrightarrow \ln\frac{2}{x}-1\geq 0$$

$$\ln\frac{2}{x}\geq 1$$

$$\frac{2}{x}\geq e$$

$$\boxed{x\leq\frac{2}{e}}$$

Pertanto



Quindi

$\boxed{x=\frac{2}{e}}$ punto di massimo, locale e assoluto.

$$M=f\left(\frac{2}{e}\right)=7\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^2\cdot\left(\ln\frac{2}{2/e}\right)^2=7\cdot\frac{4}{e^2}\cdot(\ln e)^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{M=\frac{28}{e^2}}.$$

---

(3) $$\begin{cases} y''-5y'+4y=36e^{-x} \\ y(0)=3, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'equazione omogenea associata, abbiamo

$$y''-5y'+4y=0$$

da cui

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$$

Perciò, la soluzione dell'equazione completa è

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + y_p$$

Poiché -1 <u>non</u> è soluzione dell'equazione caratteristica, abbiamo

$$y_p = A e^{-x}$$

$$y_p' = -A e^{-x}$$

$$y_p'' = A e^{-x}$$

da cui otteniamo

$$A e^{-x} + 5 A e^{-x} + 4 A e^{-x} = 36 e^{-x}$$

cioè

$$10 A = 36 \qquad \boxed{A = \frac{18}{5}}$$

Pertanto

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + \frac{18}{5} e^{-x}$$

e

$$y' = C_1 e^{x} + 4 C_2 e^{4x} - \frac{18}{5} e^{-x}$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{18}{5} = 3 \\ C_1 + 4C_2 - \frac{18}{5} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{3}{5} \\ C_1 + 4C_2 = \frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 - \frac{3}{5} \\ C_1 - 4C_2 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5} \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_2 = -C_1 - \frac{3}{5} \\ -3C_1 = 6 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = +2 - \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_1 = -2 \\ C_2 = \frac{7}{5} \end{matrix}$$

Pertanto, la soluzione del Pb di Cauchy è

$$y = -2e^{x} + \frac{7}{5}e^{4x} + \frac{18}{5}e^{-x}$$

---

④ $$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\tan^2 x - 9\tan x + 14} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

Se effettuiamo la sostituzione

$$\begin{cases} \tan x = t \,, \quad \text{da cui otteniamo} \\ \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = dt \\ x = \pi/6 \qquad t = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \pi/4 \qquad t = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

otteniamo infine

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{t^2 - 9t + 14}\, dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{(t-2)(t-7)}\, dt$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{A}{t-2}\, dt + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{B}{t-7}\, dt$$

E' immediato verificare che $B = \frac{1}{5}$, $A = -\frac{1}{5}$.

Pertanto abbiamo

$$I = \frac{1}{5}\left[\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{t-7}\,dt - \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{t-2}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{t-7}{t-2}\right|\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{-6}{-1}\right| - \ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-7}{\frac{\sqrt{3}}{3}-2}\right|\right]$$

$$\boxed{I = \frac{1}{5}\left(\ln 6 - \ln\left(\frac{21-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}\right)\right)}$$

---

(5) Abbiamo

$$L_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+\sqrt{n}+n^{3/2}}{n^{4/5}+3n^2}\right)^{2\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n^{3/2}+\sqrt{n}}{3n^2}\right)^{2\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)^{3\sqrt{n}}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{2/3} \Longrightarrow \boxed{L_1 = e^{2/3}}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0^+}\frac{3\sinh\sqrt{x} - 2\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^{-1/2}\left(e^{x^3}-\cos x + 3\ln(1+x^{5/2})\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(\cancel{x^{1/2}} + \frac{1}{6}x^{3/2} + o(x^{3/2})\right) - 2\left(\cancel{x^{1/2}} - \frac{1}{6}x^{3/2} + o(x^{3/2})\right) - \cancel{x^{1/2}}}{x^{-1/2}\left(\cancel{1} + x^3 + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 3x^{5/2} + o(x^{5/2})\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) x^{3/2}}{3x^2 + \frac{1}{2} x^{3/2} + o(x^2)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{L_2 = \frac{5}{3}}$$

---

⑥ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n^\alpha}\right) \sinh \frac{3}{n^{2\alpha}}}{1 - \cos \frac{1}{n^3}}$$

Posto $a_n = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{2}{n^\alpha}\right) \cdot \sin \frac{3}{n^{2\alpha}}}{1 - \cos \frac{1}{n^3}}$, abbiamo per $\alpha > 0$

$$a_n \sim \frac{\frac{2}{n^\alpha} \cdot \frac{3}{n^{2\alpha}}}{\frac{1}{2n^6}} = \frac{6 \cdot 2}{n^{3\alpha - 6}} = \frac{12}{n^{3\alpha - 6}}$$

Perché la serie converga, dobbiamo richiedere

$$3\alpha - 6 > 1$$

$$3\alpha > 7$$

$$\boxed{\alpha > \frac{7}{3}}$$

---

⑦ $$\frac{\bar{z}}{z^6} = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

Posto $z = \rho e^{i\vartheta}$, abbiamo immediatamente

$$\bar{z} = \rho e^{-i\vartheta}, \quad z^6 = \rho^6 e^{6i\vartheta}$$

Inoltre

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\pi/3}$$

Pertanto, possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{\rho e^{-i\vartheta}}{\rho^6 e^{6i\vartheta}} = 8 e^{i\pi/3}$$

cioè anche

$$\rho^{-5} e^{-7i\vartheta} = 8 e^{i\pi/3}$$

da cui otteniamo

$$\rho^{-5} = 8 \quad \Longrightarrow \quad \rho^5 = \frac{1}{8} \qquad \rho^5 = \frac{1}{2^3}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2^{3/5}}}$$

ed anche

$$-7\vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{21} + \frac{2}{7} k\pi$$

Anche se $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo radici distinte per $k = 0, 1, \dots 6$

Quindi

$$\vartheta_k = -\frac{\pi}{21} + \frac{2}{7} k\pi, \qquad k = 0, \dots, 6$$

e

$$z = \frac{1}{2^{3/5}} e^{i\vartheta_k}, \qquad k = 0, \_\_\_, 6$$

---

(8) $f = e^{2+8x} \ln(2x) = e^2 \cdot e^{8x} \cdot \ln 2x$

Abbiamo

$$P_2(x;1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2$$

Abbiamo

$$f(1) = e^2 \cdot e^8 \ln 2 = e^{10} \ln 2$$

$$f'(x) = e^2 \left[8 e^{8x} \ln 2x + e^{8x} \frac{1}{x} \right]$$

$$f'(1) = e^2 \left[8 e^8 \ln 2 + e^8 \cdot 1 \right] = e^{10} (8 \ln 2 + 1)$$

$$f''(x) = e^2 \left[64 e^{8x} \ln 2x + 8 e^{8x} \frac{1}{x} + 8 e^{8x} \frac{1}{x} - e^{8x} \frac{1}{x^2} \right] = e^2 \left[64 e^{8x} \ln 2x + 16 \frac{e^{8x}}{x} - e^{8x} \frac{1}{x^2} \right]$$

$$f''(1) = e^{10} \left[64 \ln 2 + 16 - 1 \right] = e^{10} (64 \ln 2 + 15)$$

Quindi

$$P_2(x;1) = e^{10} \ln 2 + e^{10} (8 \ln 2 + 1)(x-1) + \frac{e^{10}}{2} (64 \ln 2 + 15)(x-1)^2$$

PARTE B

(1) Sappiamo che esiste, finito o infinito,

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

Se consideriamo $a_n = 2^n$, abbiamo

$a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ e $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n =$
$= \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$. $\Rightarrow$ A] è falsa in generale

Con lo stesso esempio $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$ e quindi
anche C] è falsa in generale.

Infine, se consideriamo $a_n = \dfrac{1}{n}$, è chiaro
che $(-)^n a_n = (-)^n \dfrac{1}{n}$ e $\lim_{n\to\infty} (-)^n a_n = \lim_{n\to\infty} (-)^n \dfrac{1}{n} = 0$
e quindi anche D] è falsa.

La risposta corretta è B], perché se una successione
ha limite, anche una sua estratta ha limite e i due
limiti coincidono.

---

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergono.

Quindi la loro somma converge, cioè
$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge.

Poiché
$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + \cos(2\pi n) b_n] = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n + b_n],$$
concludiamo che la risposta corretta è D]

---

③ Sia $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ una funzione monotona. Dalla teoria sappiamo che

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{(0,+\infty)} f$ se f è decrescente

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{(0,+\infty)} f$ se f è crescente

Quindi A] in generale è falsa (il limite esiste)
Anche C] in generale è falsa (basta considerare una funzione monotone decrescente)
Se consideriamo $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ monotone decrescente, come indicato sopra, il limite esiste, è l'estremo inferiore dell'immagine. Non si può escludere che sia $\inf\limits_{(0,+\infty)} f = 0$.
Pertanto $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geq 0$ e la risposta corretta è B]

Se $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ è crescente, resta comunque vero che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geq 0$.

---

4 Per l'additività dell'integrale, per $c \in [a,b]$ abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

cioè anche

$$-\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

ossia

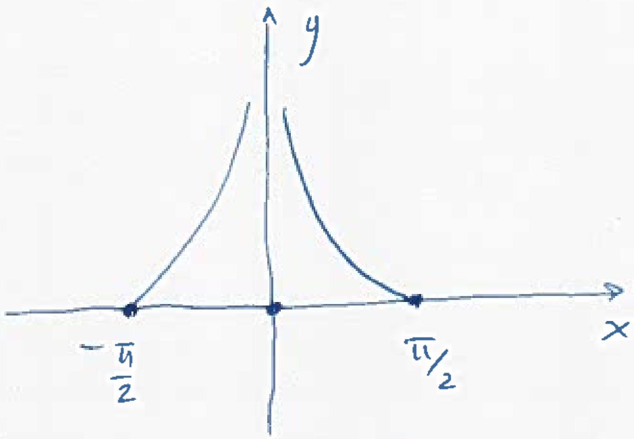
$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$$

e la risposta corretta, pertanto, è D)

(5) $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) & \text{se } x \neq 0, \pm \pi/2 \\ 0 & \text{se } x = 0, \pm \pi/2 \end{cases}$$

ha il grafico in figura



Osserviamo che f è pari, non è limitata superiormente. Pertanto, la risposta corretta è A)

(6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) \sim t$ per $t \to 0$

Quindi, per $x \to 0$

$$f(e^{x^2} - 1) \sim f(1 + x^2 - 1) = f(x^2) \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

e la risposta corretta è B)

(7) $P_2(x, 1) = 2 + x^2$

Per le proprietà del polinomio di Taylor, abbiamo

$$P_2(1) = f(1) \implies f(1) = 3$$

$$P_2'(1) = f'(1) \implies f'(1) = 2x\Big|_{x=1} = 2$$

$$P_2''(1) = f''(1) \implies f''(1) = 2$$

Quindi la risposta corretta è $\underline{C]}$

---

(8) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona strettamente crescente

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \tanh f(x)$

Poiché f è strettamente crescente e la tangente iperbolica è anche essa strettamente crescente, la funzione composta g è strettamente crescente e la risposta corretta è $\underline{D]}$

Osserviamo che $\underline{A]}$ e $\underline{C]}$ in generale sono false, perché nulla sappiamo sulla continuità e derivabilità di f.