

Analisi Matematica 1 — Soluzioni

10/09/2026

Parte A

A1

Osserviamo che

$$\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

quindi il termine generale è

$$a_n = (-1)^n n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)^{1/7} - 1 \right].$$

Per la convergenza assoluta studiamo $|a_n|$. Per $n \rightarrow \infty$ (con $\alpha > 0$):

$$\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}, \quad \cosh\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \cosh\left(\frac{1}{n}\right)^{1/7} - 1 \sim \frac{1}{2n^{2/7}}.$$

Dunque

$$|a_n| \sim \frac{1}{2} n \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{2/7}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{(\alpha - \frac{5}{7})}}.$$

La serie $\sum \frac{1}{n^{(\alpha - \frac{5}{7})}}$ converge se e solo se $\alpha - \frac{5}{7} > 1$, cioè $\alpha > \frac{12}{7}$.

La serie converge assolutamente per ogni $\alpha > \frac{12}{7}$.

A2

Sia $u = x - 2$, $f(x) = \arctan(e^u)$.

$$f(2) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$f'(x) = \frac{e^u}{1 + e^{2u}} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$f''(x) = \frac{e^u(1 - e^{2u})}{(1 + e^{2u})^2} \Rightarrow f''(2) = \frac{1 \cdot (1 - 1)}{4} = 0.$$

Il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 2$ è dunque

$$T_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 2)$$

(il termine di secondo grado è nullo).

A3

Poniamo $t = x - 2 \rightarrow 0$. Sviluppi di Taylor-Mac Laurin in t :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4), \quad \sinh t = t + \frac{t^3}{6} + o(t^4), \quad \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4).$$

Numeratore. $-\sin t + \sinh t + 2 \arctan^3 t$:

$$-\sin t + \sinh t = \frac{t^3}{3} + o(t^4), \quad \arctan^3 t = t^3 + o(t^4),$$

quindi il numeratore vale $\frac{t^3}{3} + 2t^3 + o(t^4) = \frac{7}{3}t^3 + o(t^4)$.

Denominatore. $\ln(1+t) - t + \frac{1}{2} \arctan^2 t$:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^4), \quad \arctan^2 t = t^2 + o(t^4),$$

quindi il denominatore vale $-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + o(t^4) = \frac{t^3}{3} + o(t^4)$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2-x) + \sinh(x-2) + 2 \arctan^3(x-2)}{\ln(x-1) - (x-2) + \frac{1}{2} \arctan^2(x-2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{3}t^3}{\frac{1}{3}t^3} = \boxed{7}.$$

A4

Equazione caratteristica: $r^2 + r - 2 = 0 = (r-1)(r+2)$, radici $r = 1, r = -2$. Soluzione generale:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \quad y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}.$$

Con $x_0 = \ln 2$ ($e^{x_0} = 2, e^{-2x_0} = 1/4$):

$$\begin{cases} 2C_1 + \frac{C_2}{4} = \frac{\pi}{2} \\ 2C_1 - \frac{C_2}{2} = -\pi \end{cases} \implies \frac{3}{4}C_2 = 3\frac{\pi}{2} \implies C_2 = 2\pi, \quad C_1 = 0.$$

$$\boxed{y(x) = 2\pi e^{-2x}}$$

A5

Su $[0, \pi)$, la funzione $\sin(2x)$ (con $2x \in [0, 2\pi)$) assume tutti i valori in $[-1, 1]$, raggiungendo:

- $\sin(2x) = 1$ per $2x = \frac{\pi}{2}$, cioè $x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi)$;
- $\sin(2x) = -1$ per $2x = \frac{3\pi}{2}$, cioè $x = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi)$.

Poiché $t \mapsto 2 \ln(3+t)$ è strettamente crescente, il massimo e il minimo di f si ottengono in corrispondenza dei valori estremi di $\sin(2x)$:

$$\max f = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \ln 4 = 4 \ln 2 \quad (\text{punto di massimo } x = \frac{\pi}{4}),$$

$$\min f = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \ln 2 \quad (\text{punto di minimo } x = \frac{3\pi}{4}).$$

A6

Scriviamo $z = re^{i\theta}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$. Allora

$$z^{12}\bar{z}^6 = r^{18}e^{i(12\theta-6\theta)} = r^{18}e^{i6\theta}, \quad |z|^9 = r^9.$$

L'equazione $z^{12}\bar{z}^6 = -6i|z|^9$ diventa

$$r^{18}e^{i6\theta} = -6i r^9 \Rightarrow r^{18}e^{i6\theta} = 6r^9 e^{-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}.$$

Caso $r = 0$: $z = 0$ è soluzione.

Caso $r > 0$: dividendo per r^9 ,

$$r^9 e^{i6\theta} = 6e^{-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}.$$

Uguagliando i moduli: $r^9 = 6 \Rightarrow r = 6^{1/9}$. Uguagliando gli argomenti:

$$6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta_k = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Quindi, oltre a $z = 0$, le soluzioni sono

$$\boxed{z_k = 6^{1/9} e^{i(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,}$$

cioè, esplicitamente, con argomenti $-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}$.

A7

Per $x \neq 0$, dal teorema fondamentale del calcolo,

$$F'(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{2x} - 4.$$

Poiché $\frac{\sin(\alpha x)}{x} \rightarrow \alpha$ per $x \rightarrow 0$ (limite notevole), si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \frac{\alpha}{2} - 4.$$

La condizione richiesta è

$$\frac{\alpha}{2} - 4 \geq -3 \iff \alpha \geq 2.$$

$$\boxed{\alpha \geq 2}$$

A8

Con la sostituzione $t = \sqrt{25 - x^2}$, otteniamo

$$x dx = -t dt, \quad x = 5 \Rightarrow t = 0, \quad x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = 5\frac{\sqrt{3}}{2},$$

da cui

$$\begin{aligned}
6 \int_{\frac{5}{2}}^5 \frac{\sqrt{5^2 - x^2}}{x^2} x \, dx &= - \int_{5\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{t}{25 - t^2} t \, dt = 6 \int_0^{5\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{25 - t^2} \, dt \\
&= 6 \int_0^{5\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 - 25 + 25}{25 - t^2} \, dt = 6 \int_0^{5\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[-1 + \frac{25}{25 - t^2} \right] \, dt \\
&= -6 \cdot 5\frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot 25 \int_0^{5\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2 - 25} \, dt \\
&= -30\frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot 25 \int_0^{5\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{10(t - 5)} - \frac{1}{10(t + 5)} \right) \, dt \\
&= -30\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{6 \cdot 25}{10} \ln \left(\left| \frac{t - 5}{t + 5} \right| \right) \Big|_0^{5\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= -30\frac{\sqrt{3}}{2} - 15 \ln \left(\frac{5 - 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{5 + 5\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = -30\frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) \\
&= -30\frac{\sqrt{3}}{2} + 30 \ln(2 + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = 30 \ln(2 + \sqrt{3}) - 15\sqrt{3}.$$

Parte B

B1. B. La definizione di $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = +\infty$ è: $\forall M > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ vale $(-1)^n a_n \geq M$; poiché M è arbitrario in $(0, +\infty)$, la stessa affermazione è equivalente a richiederlo con $2M$ al posto di M . Le opzioni con “ $\forall n \leq \bar{n}$ ” non esprimono una proprietà definitiva (eventuale) e sono quindi errate; l’opzione con a_n anziché $(-1)^n a_n$ non è equivalente alla definizione.

B2. A. Ponendo $y = x - \beta$ (così $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \beta$) e $w = \alpha y$, da $g(w) = p_m(w) + o(w^m)$ per $w \rightarrow 0$ segue

$$f(x) = g(\alpha(x - \beta)) = p_m(\alpha(x - \beta)) + o((\alpha y)^m) = p_m(\alpha(x - \beta)) + o((x - \beta)^m).$$

B3. D. Per definizione, f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (in particolare il limite deve esistere finito ed uguagliare il valore della funzione).

B4. D. Poiché $f(t) = o(t^2) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$, vale lo sviluppo $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ per $u \rightarrow 0$, quindi

$$g(t) = 1 - \cos[f(t)] \sim \frac{[f(t)]^2}{2}.$$

Essendo $f(t) = o(t^2)$, si ha $[f(t)]^2 = o(t^4)$, dunque $g(t) = o(t^4)$ per $t \rightarrow 0$.

B5. B. $g = e^f$ è composizione di f (strettamente decrescente) con $\exp$ (strettamente crescente), dunque g è strettamente decrescente. (Non ha necessariamente massimo/minimo su $\mathbb{R}$, non è mai nulla essendo un esponenziale, e non è detto sia limitata.)

B6. C. Da $f(x) \geq x$ su $[a, b]$, per monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{2}(b + a)(b - a).$$

B7. B. Poiché $\sum a_n < +\infty$, si ha $a_n \rightarrow 0$, dunque esiste $\bar{n}$ tale che $0 < a_n < 1$ per $n \geq \bar{n}$. Per tali n , essendo $b_n > 0$,

$$\frac{b_n}{a_n} \geq b_n.$$

Per confronto, poiché $\sum b_n = +\infty$ con termini positivi, anche $\sum \frac{b_n}{a_n} = +\infty$. (In generale $\sum \frac{a_n}{b_n}$ può invece convergere: ad es. $a_n = 1/n^2$, $b_n \equiv 1$.)

B8. C. Da $g' = f'$ su (a, b) segue $(g - f)' \equiv 0$ su (a, b) ; poiché $g - f$ è continua su $[a, b]$, per un corollario del teorema di Lagrange $g - f$ è costante su tutto $[a, b]$: esiste $c \in \mathbb{R}$ con $g(x) = f(x) + c$ per ogni $x \in [a, b]$.