1) $$I = \int_0^6 4x \ln(x+6)\, dx$$

Integriamo per parti e otteniamo

$$I = \left[2x^2 \ln(x+6)\right]_0^6 - \int_0^6 2x^2 \frac{1}{x+6}\, dx$$

$$= 2\cdot 36 \ln 12 - 2\int_0^6 \frac{x^2 - 36 + 36}{x+6}\, dx$$

$$= 72 \ln 12 - 2\int_0^6 (x-6)\, dx - 72\int_0^6 \frac{1}{x+6}\, dx$$

$$= 72 \ln 12 - 2\left[\frac{x^2}{2} - 6x\right]_0^6 - 72\left[\ln(x+6)\right]_0^6$$

$$= \cancel{72 \ln 12} - 2(\cancel{18} - \overset{18}{\cancel{36}}) - \cancel{72 \ln 12} + 72 \ln 6$$

$$= 36 + 72 \ln 6$$

Quindi

$$I - 72 \ln 6 = 36 + 72 \ln 6 - 72 \ln 6 = 36$$

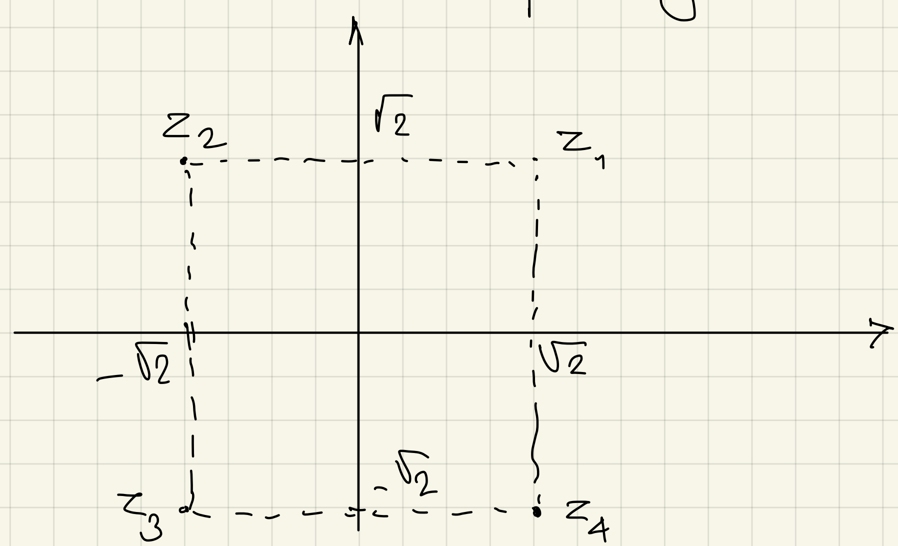
---

(2) $(z-4)(z^4+16)=0$

Le radici sono $z_0 = 4$ e $z_k = \sqrt[4]{-16}$,

con $k = 1, 2, 3, 4$.

Senza calcolarle, possiamo osservare che le quattro radici quarte di -16 si dispongono ai vertici di un quadrato, come in figura



Pertanto $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ e otteniamo

$$|z_0 + \cancel{z_1 + z_2 + z_3} + z_4| = |z_0| = |4| = 4$$

---

3 $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{-3/x}(x^2 - 27)$

Osserviamo che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Inoltre f è di classe C^∞ in $(0, +\infty)$, quindi possiamo derivare senza problemi. Abbiamo

$$f'(x) = e^{-\frac{3}{x}}\left(\frac{3}{x^2}\right)(x^2 - 27) + 2x\, e^{-3/x} =$$

$$= e^{-3/x}\left(\frac{3x^2 - 81}{x^2} + 2x\right) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 81}{x^2} e^{-3/x}$$

Se vogliamo risolvere

$$f'(x) \geq 0,$$

abbiamo

$$\frac{2x^3+3x^2-81}{\cancel{x^2}} \cancel{e^{-3/x}} \geq 0$$

e ci riduciamo a

$$2x^3+3x^2-81 \geq 0$$

perché gli altri termini sono sempre non-negativi in $(0,+\infty)$. Inoltre, applicando la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 3 & 0 & -81 \\ 3 & & 6 & 27 & +81 \\ \hline & 2 & 9 & 27 & // \end{array}$$

Pertanto

$$(2x^3+3x^2-81) = (x-3)(2x^2+9x+27)$$

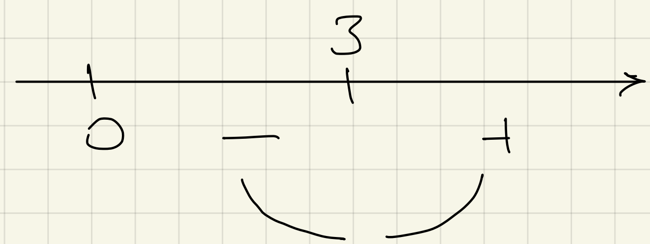
e osserviamo che

$$2x^2 + 9x + 27 = 0$$

non ha radici in campo reale. Pertanto

$$2x^3 + 3x^2 - 81 \geq 0 \implies x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$$

Dunque, il segno della derivata prima è come nello schema a fianco, e possiamo concludere che $x_0 = +3$ è il punto di minimo locale ed assoluto cercato. Pertanto

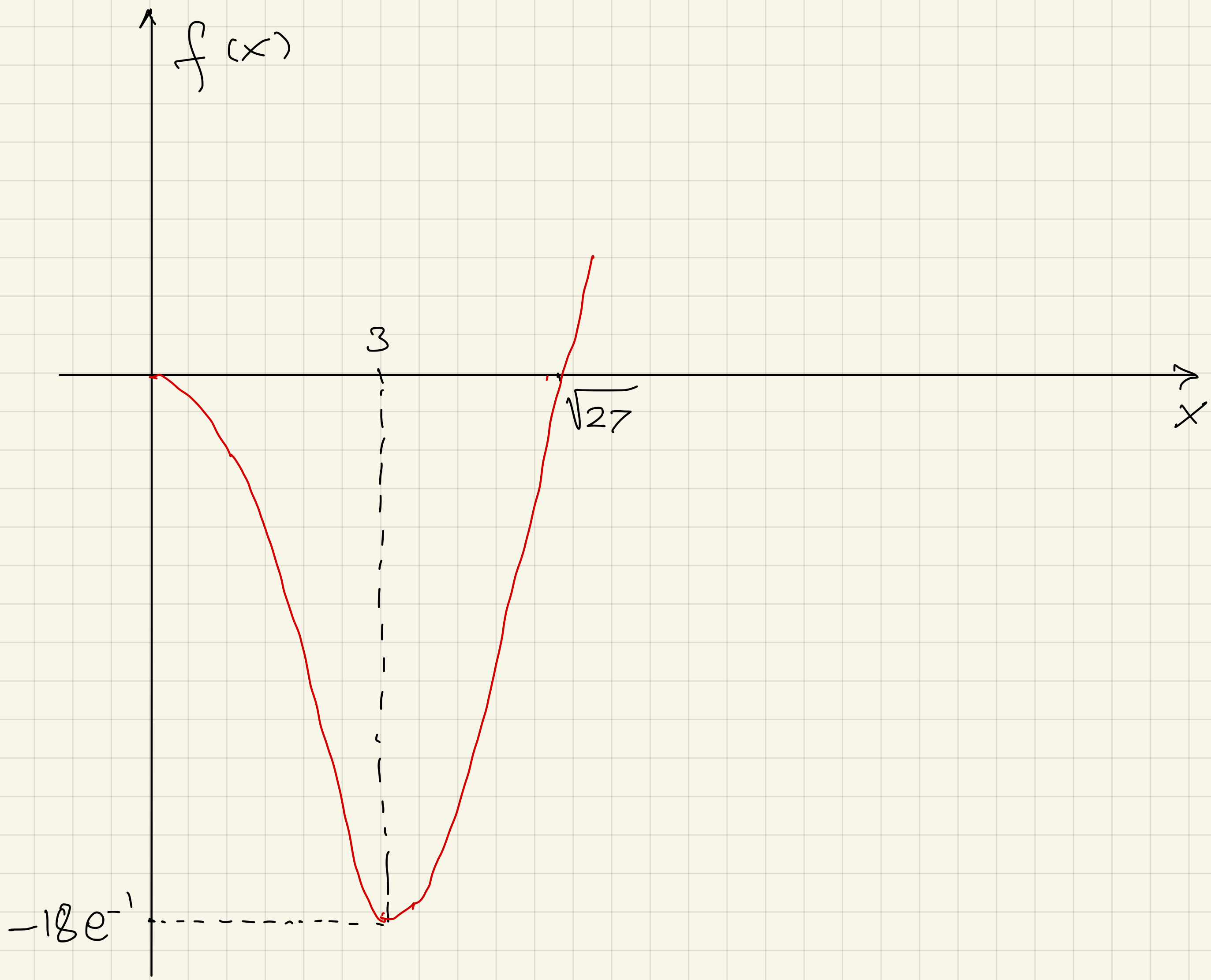


$$m = f(3) = e^{-\frac{3}{3}}(9 - 27) = e^{-1}(-18)$$

e

$$e \cdot m = e \cdot e^{-1}(-18) = -18$$

Il grafico della funzione è riportato in figura sotto, per completezza.



④ $f(x) = \ln\left[11 + (\sin x)^2\right]$

Osserviamo che

$$\sin x = \sin(\pi - x) \implies \sin^2 x = \sin^2(x - \pi)$$

Pertanto

$$f(x) = \ln\left[11 + \sin^2(x-\pi)\right] = \ln\left[11\left(1 + \frac{\sin^2(x-\pi)}{11}\right)\right]$$

$$= \ln 11 + \ln\left(1 + \frac{\sin^2(x-\pi)}{11}\right)$$

Tenendo conto che

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \implies \sin^2 t = t^2 + o(t^2)$$

concludiamo che

$$f(x) = \ln 11 + \frac{1}{11}(x-\pi)^2 + o((x-\pi)^2)$$

da cui

$$P_2(x;\pi) = \ln 11 + \frac{1}{11}(x-\pi)^2$$

e

$$P_2(\pi+11;\pi) - \ln 11 = \cancel{\ln 11} + \frac{1}{11}(\cancel{\pi}+11-\cancel{\pi})^2 - \cancel{\ln 11}$$

$$= \frac{11^2}{11} = 11$$

Se vogliamo, invece, procedere senza utilizzare gli sviluppi per definizione

$$P_2(x;\pi) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2$$

Abbiamo

$$f(\pi) = \ln(11 + \cancel{\sin^2\pi}) = \ln 11$$

$$f'(x) = \frac{1}{11 + \sin^2 x} \left(2 \sin x \cos x \right) = \frac{\sin 2x}{11 + \sin^2 x}$$

$$f'(\pi) = \frac{\cancel{\sin 2\pi}}{11 + \sin^2 \pi} = 0.$$

$$f''(x) = \frac{2 \cos 2x \, (11 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cos x \cdot \sin 2x}{(11 + \sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{2 \cos 2x \, (11 + \sin^2 x) - \sin^2 2x}{(11 + \sin^2 x)^2}$$

$$f''(\pi) = \frac{2 \cos 2\pi \, (11 + \cancel{\sin^2 \pi}) - \cancel{\sin^2 2\pi}}{(11 + \cancel{\sin^2 \pi})^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 11}{11^2} = \frac{2}{11}$$

Quindi

$$P_2(x;\pi) = \ln 11 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{11}(x-\pi)^2 =$$

$$= \ln 11 + \frac{1}{11}(x-\pi)^2$$

che coincide con quanto trovato in precedenza.

---

(5) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(7+x^4)^\alpha} \arctan\left(\frac{7}{x^8}\right) dx$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(7+x^4)^\alpha} \arctan\left(\frac{7}{x^8}\right) = \frac{1}{7^\alpha}\,\frac{\pi}{2}$$

Poiché f è limitata in un intorno destro di $x=0$, f è integrabile in tale intorno, qualunque sia il valore di α.

Se consideriamo, poi, il comportamento per $x \to +\infty$, abbiamo

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{4\alpha}} \cdot \frac{7}{x^{8}} = \frac{7}{x^{4\alpha+8}}$$

Pertanto, l'integrale converge se

$$4\alpha + 8 > 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha > -\frac{7}{4}$$

Quindi

$$I = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > -\frac{7}{4} \right\}$$

e

$$\lambda = -\frac{7}{4}$$

Pertanto

$$12\lambda = \cancel{12}^{\,3}\left(-\frac{7}{\cancel{4}_{\,1}}\right) = -21$$

⑥ $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\ln\left(1+e^{2n^5}\right)}{(n+5)!-n!}\, n^{\frac{13n}{12n^2+6}}$$

Osserviamo che per $n \to \infty$

$$(n+5)!-n! = (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\,n! - n!$$
$$= n!\left[(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)-1\right]$$
$$\sim n!\; n^5$$

$$\ln\left(1+e^{2n^5}\right) \sim 2n^5$$

$$\frac{13n}{12n^2+6} \sim \frac{13}{12n}$$

Pertanto, il limite dato si riduce al calcolo di

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\;\cancel{2n^5}}{\cancel{n!}\;\cancel{n^5}}\, n^{13/12n} = 2\lim_{n\to\infty} e^{\frac{13}{12n}\ln n} = 2$$

⑦ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ finito.

Pertanto, per la definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x > K_\varepsilon \text{ risulta } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Se scegliamo $\varepsilon = 1/42$, concludiamo che

$$\exists K > 0 \text{ t.c. } \quad \forall x > K \quad |f(x) - \ell| < \frac{1}{42}$$

ossia

$|f(x) - \ell| < \frac{1}{42}$ definitivamente, cioè a)

---

⑧ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabile in $x_0 \in (a,b)$.

Poiché f è derivabile in x_0, f è continua in x_0.

Poiché $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sin t$ è continua ovunque, concludiamo che

$$(g \circ f)(x) = \sin f(x)$$

è continua in x_0 per il Teorema di composizione delle funzioni continue. Pertanto

$$\lim_{x \to x_0} \sin f(x) = \sin f(x_0) \qquad \text{cioè } \underline{\underline{c}}).$$

---

(9) $E = [0,1] \cup [2,3]$, $f : E \to \mathbb{R}$, continua in E.
Poiché E è un insieme chiuso e limitato e f è continua su tale insieme, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo M e mini-

mo m, ossia $\exists\ x_1, x_2 \in E$ t.c.

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$$

$\forall x \in E$, ossia $\underline{\underline{a}}$).

---

(10) $\{a_n\}$ è una successione a termini positivi, monotona crescente, limitata.

In altri termini, esiste $M > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n \leq M$$

Inoltre, per il Teorema sui limiti delle successioni monotone, concludiamo che

$\exists L > 0$ t.c. $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

Poiché $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \ln(1+t)$

è una funzione continua, se componiamo una funzione continua con una successione convergente, concludiamo che la successione che otteniamo è anch'essa convergente, ossia

$$\lim_{n \to \infty} \ln(1+a_n) \quad \text{esiste ed è finito,}$$

ossia $\underline{\underline{d)}}$.

Peraltro, possiamo osservare anche che

$$0 < a_n \leq M \implies 1 < 1+a_n \leq 1+M$$

$$\implies \quad 0 < \ln(1+a_n) \leq \ln(1+M)$$

Pertanto la successione $\{\ln(1+a_n)\}$ è

1) inferiormente limitata $\Longrightarrow$ b) è falso

2) superiormente limitata $\Longrightarrow$ a) è falso

3) La funzione $g(t) = \ln(1+t)$ è monotona crescente. Perciò, visto il carattere di $\{a_n\}$, anche $\{\ln(1+a_n)\}$ è monotona crescente e necessariamente deve avere limite. Quindi, anche c) è falsa.

---

(11) $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = o(g(x))$ per $x \longrightarrow x_0$

Per definizione di o piccolo, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = 0,$$

cioè $\underline{\underline{c)}}$.

---

(12) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty$

Se abbiamo

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

osserviamo che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |F(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \right| \leq \int_{-\infty}^{x} |f(t)|\,dt$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$$

Pertanto, F è limitata, ossia $\underline{\underline{b)}}$.