PARTE A

Esercizio 1

Dato $z = 7e^{\frac{\pi}{4}i}$ calcolare $\text{Im}(z^{14}\bar{z}^9)$. Abbiamo

$$\bar{z} = 7e^{-\frac{\pi}{4}i}, \quad \bar{z}^9 = 7^9 e^{-\frac{9}{4}\pi i}, \quad z^{14} = 7^{14} e^{\frac{14}{4}\pi i}.$$

Quindi

$$z^{14}\bar{z}^9 = 7^{14} e^{\frac{14}{4}\pi i} 7^9 e^{-\frac{9}{4}\pi i} = 7^{23} e^{\frac{5}{4}\pi i} = 7^{23} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right].$$

Concludiamo che

$$\text{Im}(z^{14}\bar{z}^9) = -\frac{\sqrt{2}}{2}7^{23}.$$

Passando al secondo punto dell' esercizio, abbiamo l'equazione

$$[(z + \bar{z})^2 + 14] [(z - \bar{z})^2 + 9] = 0$$

Se $z = x + iy$ risulta $\bar{z} = x - iy$, da cui

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x, \quad z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy.$$

Pertanto

$$[(z + \bar{z})^2 + 14] [(z - \bar{z})^2 + 9] = 0$$

diventa

$$\underbrace{[4x^2 + 14]}_{>0} [9 - 4y^2] = 0$$
$$9 - 4y^2 = 0, \quad y^2 = \frac{9}{4}, \quad y = \pm \frac{3}{2},$$

e la soluzione è

$$z = x \pm \frac{3}{2}i, \quad x \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

Esercizio 2

$$f(x) = \frac{\ln(1 + (x-2)^\alpha)}{\sinh[(x-2)^{\frac{1}{2}}]}, \quad x \geq 2.$$

Per $x \rightarrow 2^+$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{(x-2)^\alpha}{(x-2)^{\frac{1}{2}}} = (x-2)^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Perchè f sia prolungabile con continuità a destra in 2, occorre che

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ esista finito, cioè } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \text{ esista finito, } \Rightarrow \alpha - \frac{1}{2} \geq 0, \quad \alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che per questi valori, per il prolungamento di f abbiamo

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad f(2) = 1,$$

$$\alpha > \frac{1}{2} \quad f(2) = 0.$$

Affinché il prolungamento sia derivabile da destra in 2, occorre che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \text{ esista finito.}$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$, dai noti sviluppi abbiamo

$$\ln(1 + (x-2)^{1/2}) = (x-2)^{1/2} - \frac{1}{2}(x-2) + o(x-2) \quad \text{per } x \rightarrow 2,$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)^{1/2} - \frac{1}{2}(x-2) + o(x-2)}{(x-2)^{1/2} + o(x-2)} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-2)^{1/2} + o(x-2)^{1/2} \quad \text{per } x \rightarrow 2 \end{aligned}$$

e in 2 abbiamo un comportamento tipo cuspidale (solo la parte destra, effettivamente). Dunque, per $\alpha = \frac{1}{2}$, la funzione non è derivabile. Dobbiamo necessariamente considerare $\alpha > \frac{1}{2}$. Ricordiamo che, in corrispondenza, $f(2) = 0$. Pertanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h-2)^{\alpha-1/2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{\alpha-\frac{3}{2}}.$$

Affinché tale limite esista finito, necessariamente dobbiamo richiedere

$$\alpha - \frac{3}{2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq \frac{3}{2}.$$

Esercizio 3

Abbiamo

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definita da } f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}.$$

Possiamo osservare che

$$g_1(t) = \arcsin t, \quad t \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad g_2(t) = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$$

sono due funzioni strettamente crescenti. Pertanto, anche

$$g_3(t) = \arcsin \sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

è strettamente crescente, e i punti di massimo e minimo di f coincidono con i punti di massimo e minimo di $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \frac{x}{x^2+2}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x^2+2 - 2x \cdot x}{(x^2+2)^2} = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} \\ h' \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{dominio di } h) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo che $x = \sqrt{2}$ è punto di massimo per h e, per quanto detto sopra, anche per f . Inoltre,

$$M = f(\sqrt{2}) = \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

Qualora non ci si fosse accorti che la funzione f è funzione strettamente crescente di $\frac{x}{x^2+2}$, si poteva comunque derivare f , ottenendo

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x^2+2}\right)^2}}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+2}}}}_{>0} \cdot D\left(\frac{x}{x^2+2}\right)$$

e

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} \geq 0.$$

Infine, osserviamo che

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & \forall x > 0 \quad f(x) > 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0, \\ M = \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}} &\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}}. \end{aligned}$$

Pertanto, $f(x) = \lambda$ ha due radici **distinte** se $0 < \lambda < M$.

Esercizio 4

Se ci limitiamo, per il momento, alla sola equazione differenziale, possiamo riscrivere

$$u' = -\frac{6t}{1+t^2}u + 8t,$$

da cui otteniamo

$$u = e^{-\int \frac{6t}{1+t^2} dt} \left[C + \int 8te^{\int \frac{6t}{1+t^2} dt} dt \right].$$

Abbiamo

$$\int \frac{6t}{1+t^2} dt = 3 \int \frac{2t}{1+t^2} dt = 3 \ln(1+t^2),$$

da cui

$$u = e^{-3 \ln(1+t^2)} \left[C + 8 \int te^{3 \ln(1+t^2)} dt \right]$$

cioè anche

$$u = e^{\ln(1+t^2)^{-3}} \left[C + 8 \int te^{\ln(1+t^2)^3} dt \right] = \frac{1}{(1+t^2)^3} \left[C + 8 \int t(1+t^2)^3 dt \right].$$

Consideriamo

$$\int t(1+t^2)^3 dt = \left(\begin{array}{l} 1+t^2 = s \\ 2tdt = ds \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int s^3 ds = \frac{1}{2} \frac{s^4}{4} \Big|_{s=(1+t^2)} = \frac{(1+t^2)^4}{8},$$

da cui

$$u = \frac{1}{(1+t^2)^3} \left[C + 8 \frac{1}{8} (1+t^2)^4 \right] = \frac{C}{(1+t^2)^3} + (1+t^2);$$

imponiamo, ora, la condizione iniziale $u(0) = 12$ ed otteniamo

$$12 = C + 1 \Rightarrow C = 11.$$

Quindi, la soluzione cercata è

$$u = \frac{11}{(1+t^2)^3} + (1+t^2)$$

Esercizio 5

Sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)^5 \left(1 - e^{-5/n^3} \right);$$

posto

$$a_n = n^{\alpha} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)^5 \left(1 - e^{-5/n^3} \right),$$

abbiamo

$$a_n \sim n^{\alpha} \left(1 - 1 + \frac{1}{2n^4} \right)^5 \left(1 - 1 + \frac{5}{n^3} \right) \sim n^{\alpha} \frac{1}{32 n^{20}} \cdot \frac{5}{n^3} = \frac{5}{32} \frac{1}{n^{23-\alpha}}.$$

Affinché la serie converga, dobbiamo richiedere $23 - \alpha > 1 \Rightarrow \alpha < 22$.

Esercizio 6

$$\begin{aligned} \int_{-1/8}^{1/8} \frac{x+64}{1+(8x)^2} dx &= \underbrace{\int_{-1/8}^{1/8} \frac{x}{1+(8x)^2} dx}_{=0 \text{ perché l'integranda è dispari su intervallo simmetrico}} + 64 \int_{-1/8}^{1/8} \frac{1}{1+(8x)^2} dx \\ &= 128 \int_0^{1/8} \frac{1}{1+(8x)^2} dx \left(\begin{array}{ll} 8x = t & x = 1/8 \rightarrow t = 1 \\ dx = \frac{1}{8} dt & x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right) \\ &= \frac{128}{8} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 16 [\arctan t]_0^1 = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = 4\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 7

Abbiamo

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \sin(5 \ln x),$$

da cui

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos(5 \ln x) \cdot \frac{5}{x} = 10 \frac{\cos(5 \ln x)}{x}, \\ f''(x) &= 10 \frac{-\sin(5 \ln x) \cdot \frac{5}{x} \cdot x - \cos(5 \ln x)}{x^2} = -\frac{10}{x^2} (5 \sin(5 \ln x) + \cos(5 \ln x)). \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{\pi}{30}}\right) &= 2 \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{30}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \\ f'\left(e^{\pi/30}\right) &= 10 \frac{\cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{30}\right)}{e^{\pi/30}} = \frac{10}{e^{\pi/30}} \cos \frac{\pi}{6} = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\pi/30} = 5\sqrt{3} e^{-\pi/30}, \\ f''\left(e^{\pi/30}\right) &= -\frac{10}{e^{\pi/15}} \left(5 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right) = -10 e^{-\pi/15} \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5 e^{-\pi/15} (5 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio di Taylor cercato è

$$P_2(x, e^{\pi/30}) = 1 + 5\sqrt{3} e^{-\pi/30} (x - e^{\pi/30}) - \frac{5}{2} e^{-\pi/15} (5 + \sqrt{3}) (x - e^{\pi/30})^2.$$

Esercizio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{3x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{3x^\alpha} \ln(1+2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{3x^\alpha} \cdot 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{3} x^{2-\alpha}}.$$

Affinché il limite risulti infinito è necessario e basta che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3} x^{2-\alpha} = +\infty$$

e ciò accade se $2 - \alpha < 0$, cioè $\alpha > 2$.

Se poi $\alpha = 2$, abbiamo dai calcoli precedenti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{3} \cdot 1} = e^{2/3}.$$

PARTE B

Esercizio 1

Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n < +\infty,$$

poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Quindi, la risposta corretta è **C**.

Osserviamo che per $a_n = (-)^n \frac{1}{n}$ si verifica immediatamente che **A** è falsa. Con lo stesso esempio, abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-)^{n+1} \frac{1}{n+1}}{(-)^n \frac{1}{n}} = -\frac{n}{n+1}$$

e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ non può convergere, perché $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{n+1} = -1$ ed è violata la condizione necessaria di convergenza. Dunque, **B** è falsa. Infine, con $a_n = \frac{(-)^n}{\sqrt[4]{n}}$, abbiamo $a_n^2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e quindi anche **D** è falsa.

Esercizio 2

Osserviamo che $\forall x \in (-3, -1)$ la funzione $g(x) = \arcsin(x+2)$ è monotona strettamente crescente e $\text{Im } g = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Poiché $\tan t$ con $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è anch'essa monotona strettamente crescente, possiamo concludere che f è strettamente crescente in $(-3, -1)$, perché composizione di funzioni strettamente crescenti; la risposta corretta è **A**.

Esercizio 3

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$, per la definizione di limite abbiamo che

$$\forall K > 0 \quad \exists M > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x > M \quad \text{risulta} \quad |f(x)| > K;$$

dunque, in particolare, $\exists M > 0$ tale che $\forall x > M$ risulta $|f(x)| > 0$, che è la risposta **B**.

Esercizio 4

Per il Teorema di Lagrange, le cui ipotesi sono soddisfatte, $\exists \xi \in (a^2, b^2)$ tale che

$$f(b^2) - f(a^2) = f'(\xi) (b^2 - a^2),$$

cioè **B** è la risposta corretta.

Esercizio 5

Abbiamo

$$P_2(x; 1) = 1 - 2x + 2x^2,$$

da cui

$$P_2' = -2 + 4x; \quad P_2'' = 4$$

Dalla teoria, sappiamo che

$$f(1) = P(1, 1) = 1, \quad f'(1) = P_2(1; 1) = 2, \quad f''(1) = P_2'(1; 1) = 4.$$

Pertanto, la risposta corretta è **A**.

Esercizio 6

Poichè f è derivabile in x_o , $\exists f'(x_o)$ finito, tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o),$$

cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = f'(x_o),$$

che possiamo equivalentemente riscrivere come

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) - f'(x_o) = 0$$

cioè

$$g(h) - f'(x_o) = o(1) \text{ per } h \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(h) = f'(x_o) + o(1) \text{ per } h \rightarrow 0.$$

La risposta corretta è **A**.

Esercizio 7

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in (-1, 1)$ e $\arctan t$ con $t \in \mathbb{R}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, per definizione di funzione continua, concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan a_n = L_2 \quad \text{dove} \quad L_2 \in (\arctan(-1), \arctan(1)), \quad \text{cioè} \quad L_2 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

La risposta corretta è dunque **D**. Possiamo osservare che anche $e^{|t|}$ con $t \in \mathbb{R}$ è continua. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{|a_n|} = L_1 \in (e^0, e^1), \quad \text{cioè} \quad L_1 \in (1, e);$$

non è l'intervallo indicato nella risposta **A**, che è dunque falsa.

Esercizio 8

Abbiamo

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{con} \quad f \text{ monotona.}$$

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona, l'integrale è ben definito, ma non possiamo affatto concludere che F sia derivabile (basta considerare, ad esempio, $f(x) = \text{sign } x$). Quindi **A** è, in generale, falsa. Se prendiamo $f \equiv 1$ (funzione monotona crescente), abbiamo

$$F(x) = \int_0^x 1 dt = x.$$

Quindi f è continua, ma non è vero che $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e anche **D**, in generale, è falsa. Se $f(x) = x - 3$ (funzione monotona strettamente crescente), abbiamo

$$F(x) = \int_0^x (t - 3) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 3t \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - 3x.$$

Anche in questo caso non è vero che $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e anche **C**, in generale, è falsa. Se $x \cdot f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$f(x) \geq 0 \text{ per } x > 0, \quad f(x) \leq 0 \text{ per } x < 0.$$

Quindi

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt \geq x \cdot \underbrace{\min_{t \in [0, x]} f(t)}_{\geq 0} \geq 0,$$

$$\forall x < 0 \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt \geq -(-x) \cdot \min_{t \in [x, 0]} f(t) = x \cdot \underbrace{\min_{t \in [x, 0]} f(t)}_{\leq 0} \geq 0,$$

e la risposta corretta è **B**.