SOLUZIONI PROVA D'ESAME 17/3/21

DOMANDA 1 $f:[1,6]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\left((x-6)^2(x-1)\right)^{1/3}$ è continua nel suo dominio e derivabile in $(1,6)$. Notiamo inoltre che $f\geq 0$ e che $f(1)=f(6)=0$, quindi $x=1,6$ saranno punti di minimo per f.

Per trovare il punto di massimo, calcoliamo la derivata prima in $(1,6)$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left((x-6)^2(x-1)\right)^{-2/3}\cdot\left[2(x-6)(x-1)+(x-6)^2\right]=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\left((x-6)^2(x-1)\right)^{-2/3}}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x-6)}_{\leq 0}\cdot\underbrace{\left[2x-2+x-6\right]}_{3x-8}$$

Dunque $f'(x)\geq 0$ in $\left(1,\frac{8}{3}\right)$ e $f'(x)\leq 0$ in $\left(\frac{8}{3},6\right)$ e $x_M=\frac{8}{3}$ è il punto di massimo assoluto per f. $3x_M=8$

DOMANDA 2

$$\begin{cases} u''(t)-4u'(t)+4u(t)=4t-2 \\ u(0)=\frac{3}{2} \quad u'(0)=2 \end{cases}$$

Cerchiamo le sol del pb omogeneo studiando il pol. caratteristico

$\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$ Dunque abbiamo due radici reali coincidenti $\lambda_1=\lambda_2=2$. $u_0(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$ è la sol generale dell'eq. omogenea.

Cerchiamo una soluzione particolare col metodo di variazione delle costanti. Poiché $\mu=0$ non è radice del pol. caratteristico, cerchiamo $u_p(t)=At+B$, con A e B da determinare imponendo che u_p soddisfi l'eq.:

$$-4A+4At+4B=4t-2 \qquad \begin{cases}4A=4\\4B=2\end{cases} \qquad \begin{matrix}A=1\\B=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$u(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+t+\frac{1}{2}$. Usando le condizioni iniziali determiniamo c_1,c_2.

$$\left.\begin{matrix} u(0)=\frac{3}{2}=c_1+\frac{1}{2} \Rightarrow c_1=1 \\ u'(0)=2=2+c_2+1 \Rightarrow c_2=-1\end{matrix}\right\} u(t)=e^{2t}-te^{2t}+t+\frac{1}{2}$$

$$u(1)=e^2-e^2+1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2\cdot u(1)=3.$$

DOMANDA 3)
$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7} \frac{5}{\sqrt{7^2-x^2}} \arcsin\left(\frac{x}{7}\right) dx =$$

Partiamo con il cambio di variabile $y=\frac{x}{7}$ $dx = 7dy$ $x=\frac{\sqrt{3}}{2}7 \to y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=0 \to y=0$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{5\cdot \cancel{7}}{\cancel{7}\sqrt{1-y^2}} \arcsin(y)\, dy =$$

RICORDANDO $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ e $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2(t) = u'(t)u(t)$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{5}{2} \frac{d}{dy} \arcsin^2(y)\, dy =$$

$$= \frac{5}{2} \arcsin^2(y) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2}\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 0\right) = \frac{5}{18}\cdot\pi^2$$

Dunque $\frac{18}{\pi^2}\cdot I = 5$.

DOMANDA 4)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{2/x}-1\right)\left(\cos\frac{5}{x}-1\right)}{\sinh\left(\frac{5}{x^3}\right)} =$$

Ricordando che, per $t\to 0$ $e^t = 1+t+o(t)$
$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ $\sinh t = t+o(t)$, otteniamo

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{-25}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\frac{5}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-25\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{5/x^3+o(1/x^3)} = -5$$

Dunque $2L = -10$

DOMANDA 5 | $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{6}{n} - \alpha \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) n^{1/3}$.

Usiamo il criterio del confronto asintotico e quindi, poiché per $n \to +\infty$ $\sin \frac{6}{n} \sim \frac{6}{n}$ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, basta studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{\alpha}{n}\right) n^{1/3}$.

Per ogni $\alpha \neq 6$, la serie è del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(6-\alpha)}{n^{2/3}}$, che è divergente ($a +\infty$ se $\alpha < 6$, $a -\infty$ se $\alpha > 6$).

Per $\alpha = 6$, invece la serie è convergente. Infatti, considerando un termine in più nell'equivalenza asintotica, si vede che $\sin \frac{6}{n} \sim \frac{6}{n} - \left(\frac{6}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e quindi ($\alpha=6$) si ha che la serie di partenza è equivalente a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{36}{n^3} + \frac{1}{2n^2}\right) n^{1/3} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{36}{n^{8/3}} + \frac{1}{2n^{5/3}} < +\infty$$

poiché $\frac{8}{3} > 1$, $\frac{5}{3} > 1$.

DOMANDA 6 | Sia $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z|^2 = 9$. Calcolare $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Scriviamo $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ e ricordiamo che $|z|^2 = x^2 + y^2$

$$|1+z|^2 = |(1+x) + iy|^2 = (1+x)^2 + y^2 = 1 + x^2 + 2x + y^2$$

$$|1-z|^2 = |(1-x) - iy|^2 = (1-x)^2 + y^2 = 1 + x^2 - 2x + y^2.$$

Dunque $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 1 + x^2 + y^2 = 1 + |z|^2 = 1 + 9 = 10$.

DOMANDA 7 | $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$P_2(x,0) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2$. Chiaramente $F(0) = 0$.

$F'(x) = f(x)$, dunque $F'(0) = f(0) = 0$, siccome f è dispari

$F''(x) = f'(x)$, dunque $P_2(x,0) = \frac{f'(0)}{2}x^2$ e $f \in C^1$ quindi $f'(0)$ esiste finito.

Quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{P_2(x,0)}{x^2} = \frac{f'(0)}{2}$ che esiste finito $\longrightarrow$ (d) è la risposta esatta.

$P(1,0) = \frac{f'(0)}{2}$ non è necessariamente positivo, si pensi $f(x) = -x$

Analogamente $P(-1,0) = -\frac{f'(0)}{2}$ non è necessariamente negativo, con lo stesso controesempio

DOMANDA 8 | $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

Riscrivo in modo più interessante $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} - 1 = 0$ cioè

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x} = 0$ Quindi $f(x) - x = o(x)$ per $x \to 0$

ovvero $f(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$ ed è corretta la (b).

La (a) è ovviamente falsa, si prenda $f(x) = x$

Come controesempio per (c), (d) si prenda ad esempio $f(x) = x + x^{5/3}$

DOMANDA 9 | Per ipotesi abbiamo che (e per definizione di pol di Taylor)

$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ $g(x) = 1 + x + o(x^2)$ per $x \to 0$.

$f(x)\, g(x) = \left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + x + o(x^2)\right) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^2)$ per $x \to 0$.

Ma siccome viene chiesto il pol di Taylor di secondo grado per fg in $x_0 = 0$, noto che $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$ e dunque

$R(x) = 1 + 2x + 2x^2$.

DOMANDA 10 | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

La risposta corretta è la (c) : infatti se $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, siccome f è anche continua (derivabile $\Rightarrow$ continua) deduciamo che (teorema dei valori intermedi) $f(x) > 0 \ \forall x$ oppure $f(x) < 0 \ \forall x$.

Dunque $|f(x)| = f(x) \ \forall x$ oppure $|f(x)| = -f(x) \ \forall x$ e quindi $|f|$ è derivabile in $\mathbb{R}$.

Il controesempio per (a), (b), (d) è $f(x) \equiv 0 \ \forall x$.

Questa è derivabile, ma ha infiniti zeri

$|f| = f = 0$ è derivabile negli zeri, e quindi è anche ivi continua

DOMANDA 11 (a_n) succ. reale tc

1) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ tc $|a_n-a_{n+1}|<\varepsilon\quad \forall n\geq n_\varepsilon$

2) $\lim_{k\to+\infty} a_{2k}=\ell\in\mathbb{R}$

La (a) è chiaramente falsa, basta prendere come controesempio la successione costante $a_n=1\ \forall n$ (per $\ell=1\in\mathbb{R}$)

La (b) è pure falsa con lo stesso controesempio; se $a_n=1\ \forall n$

$\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1}=1$ e non $\ell+1=1+1=2$

La (d) è pure falsa sempre col controesempio $a_n=1\ \forall n$

Vediamo meglio perché (c) è corretta.

Riscriviamo l'ipotesi 2: $\forall\varepsilon\ \exists k_\varepsilon>0$ tc $\forall k\geq k_\varepsilon\ |a_{2k}-\ell|\leq\varepsilon$.

Cerchiamo di mostrare $\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell$. Fisso $\varepsilon>0$ e grazie alle ip. 1,2 ho $n_\varepsilon, k_\varepsilon$ opportuni e scelgo $N_\varepsilon=\max\{n_\varepsilon, 2k_\varepsilon\}$

così per ogni $n\geq N_\varepsilon$ abbiamo:

$$|a_n-\ell|=\begin{cases}\text{se } n=2k \text{ pari} & |a_{2k}-\ell|\leq\varepsilon \text{ perché } 2k\geq 2k_\varepsilon \text{ per (2)}\\ \text{se } n=2k+1 \text{ dispari} & \text{allora}\end{cases}$$

$$|a_{2k+1}-\ell|=|a_{2k+1}-a_{2k+2}+a_{2k+2}-\ell|\leq|a_{2k+1}-a_{2k+2}|+|a_{2k+2}-\ell|$$

$\leq 2\varepsilon$ grazie a 1 e 2 e al fatto che $2k+1, 2k+2\geq n_\varepsilon$.

DOMANDA 12

Controesempio alla (a) è $f(x)\equiv 0 \Rightarrow \cancel{g(x)}\ xf(x)\equiv 0$ e dunque $\max_{[-9,0]} f=0$

Con lo stesso controesempio vediamo che (b) e (d) sono false perché $\max g=\min g=0$

Vediamo che (c) è corretta: si verifica innanzitutto che g è dispari $g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$, poiché f è pari.

Di conseguenza, detti x_M e x_m due punti di massimo e di minimo per g (esistono per Weierstraß), si ha che $x_M=-x_m$ e dunque $\max g\cdot\min g\leq 0$.