PARTE B

1] Sia a_n una successione strettamente monotona, infinitesima e tale che $a_{43} < 0$.

Poichè $\{a_n\}$ è infinitesima

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Poichè è monotona e $a_{43} < 0$, tutti i termini della successione sono negativi e risulta

$$a_1 < a_2 < a_3 \; \cdots \quad < a_{43} < a_{44} < \cdots < 0$$

Quindi

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0^-$$

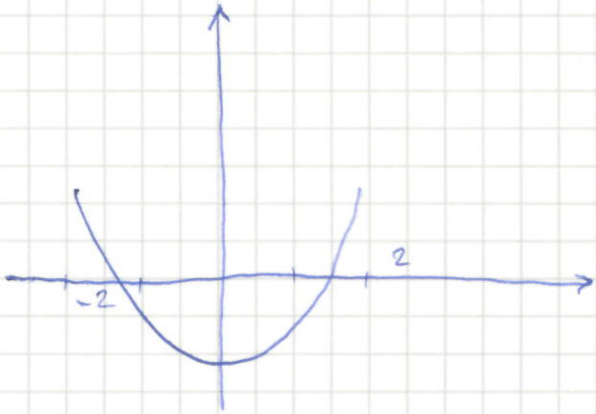
e conseguentemente $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$

2] Poichè f è continua in un intervallo chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo.

Dunque esiste in particolare $c \in [0,1]$ dove tale minimo è assunto, cioè $\exists\, c \in (0,1)$ t.c. $f(c) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$

3] $f \in C^2((-2,2))$, strettamente convessa

Il comportamento è del tipo in figura e, dunque, f non può che essere inferiormente limitata.



4] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

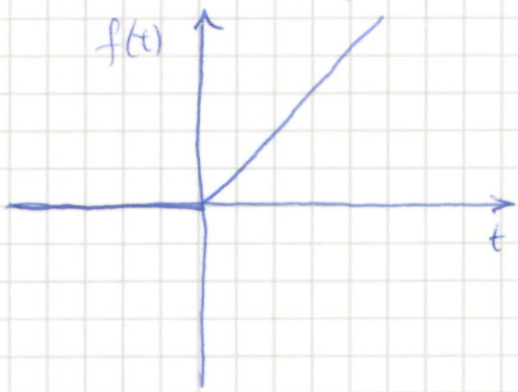
$F(x)$ è <u>una</u> primitiva di f, ossia $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre $F(a) = 0$ per costruzione.

Se G è <u>una</u> primitiva di f, analogamente $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pertanto $\forall x \in \mathbb{R}$ $G'(x) = F'(x)$

5] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \max\{t, 0\}$.

In figura il grafico di f



Consideriamo $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

È chiaro che, se $x > 0$

$$F(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Se, invece, $x < 0$

$$F(x) = \int_0^x 0\,dt = 0$$

Quindi
$$F(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e F è chiaramente convessa.

6] $0 \leq a_n \leq c\, b_n$

Per il criterio del confronto se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

7] $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ monotona e limitata.

Esistono m e M t.c. $\forall x \in (0,2)$

$$m < f(x) < M$$

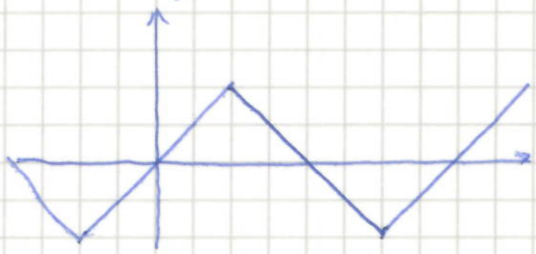
Dunque il limite può solo esistere finito

8] Per definizione di derivata (che esiste $\forall x \in (a,b)$)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

9] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica.

Pensando a $f(x) = \sin x$, è chiaro che non può essere monotona o invertibile.
Pensando a f il cui grafico è dato in figura



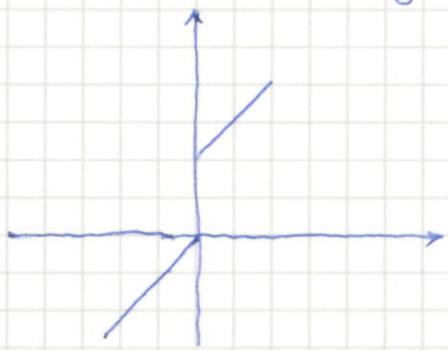
è chiaro che f non è necessariamente derivabile. Quindi può essere solo limitata

---

10] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente

$$g(x) = e^{-f(x)}$$

Poiché l'esponenziale non si annulla mai, non può esistere $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x_0) = 0$.



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Poiché f non è continua, non lo sarà neppure g.

Se $f(x) = x$ $\qquad g(x) = e^{-x}$ che è strettamente decrescente.

D'altro canto, poiché l'esponenziale è funzione monotona strettamente crescente e $-f$ è strettamente decrescente, g è strettamente monotona e dunque iniettiva.