

PARTE A

Esercizio 1

$$\begin{aligned}\frac{z+\xi}{w} &= \frac{3+i+1-2i}{1+i} = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \\ &= \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3-5i}{2}\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+\xi}{w}\right) = \frac{3}{2}$$

Esercizio 2

$$\begin{aligned}&\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4 \ln(2n)}{6n + (-)^n} + \frac{6e^{4n} + 4e^{-6n}}{4n^6 + e^{3n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 \ln n}{6n} + \frac{6e^{4n}}{e^{3n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{\ln n}{n} + 6 \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = +\infty\end{aligned}$$

Esercizio 3

Poiché $a > 0$ $3-a < (3+a \cos x) < 3+a$

Pertanto $x(3+a \cos x) > (3-a)x$

e se $a < 3$ il limite esiste e vale $+\infty$

Se $a \geq 3$ la funzione $x(3+a \cos x)$ non ammette limite quando $x \rightarrow +\infty$

Esercizio 4

$$y'' = 3y' + 2y = x - \frac{1}{2}$$

L'equazione omogenea associata è $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

Pertanto le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

Per quanto riguarda l'equazione completa, poiché il termine noto è un polinomio di I grado e l'ordine minimo di derivazione di y è zero, la soluzione particolare sarà $y_p = Ax + B$, da cui $y_p' = A$, $y_p'' = 0$.

Sostituendo

$$0 - 3A + 2Ax + 2B = x - \frac{1}{2}$$

e quindi

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$-3A + 2B = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

L'integrale generale dell'equazione completa, pertanto, è

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Esercizio 5

$$\begin{aligned} \int_0^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x+2}\right) dx &= \left[x \ln\left(1 + \frac{2}{x+2}\right) \right]_0^2 + \\ &- \int_0^2 x \frac{1}{1 + \frac{2}{x+2}} \left(-\frac{2}{(x+2)^2}\right) dx = \\ &= 2 \ln \frac{3}{2} + 2 \int_0^2 \frac{x(x+2)}{x+4} \frac{1}{(x+2)^2} dx \\ &= 2 \ln \frac{3}{2} + 2 \int_0^2 \frac{x}{(x+2)(x+4)} dx \\ &= 2 \ln 3 - 2 \ln 2 + 2 \int_0^2 \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} \right) dx \\ &= 2 \ln 3 - 2 \ln 2 + 2 \left[2 \ln(x+4) - \ln(x+2) \right]_0^2 \\ &= 2 \ln 3 - 2 \ln 2 + 4 \ln 6 - 2 \ln 4 \\ &\quad - 4 \ln 4 + 2 \ln 2 \\ &= 2 \ln 3 - \cancel{2 \ln 2} + 4 \ln 3 + \cancel{4 \ln 2} - \cancel{4 \ln 2} \\ &\quad + \cancel{2 \ln 2} - 8 \ln 2 \\ &= 6 \ln 3 - 8 \ln 2 \end{aligned}$$

Esercizio 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln(1 + n^{-\alpha})$$

$$[\quad] \quad a_n = n^2 \ln(1 + n^{-\alpha})$$

e per $n \rightarrow \infty$

$$a_n \sim \frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$$

se $\alpha > 0$

$$a_n \sim n^2 \ln n^{|\alpha|}$$

se $\alpha < 0$

$$a_n \approx n^2 \ln 2$$

$$\alpha = 0$$

È chiaro che se $\alpha \leq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
e la serie non può convergere.

Se $\alpha > 0$ la serie converge poiché $\alpha - 2 > -1$,
ossia $\alpha > 1$

Esercizio 7

$$\int_9^{+\infty} \frac{\ln(x^5+1) + 2x^3+1}{x^5 \arctg(x^3) - 2 \sin 5x} dx$$

Nell'intervallo $[9, +\infty)$, l'unica "singolarità" è rappresentata da $+\infty$. Inoltre

$$\text{pp } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{2x^3}{\pi/2 x^5} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{x^2}$$

Poiché l'esponente è $2 > 1$, l'integrale converge.

Esercizio 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^3} - 1}{\sin x - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x^3 + o(x^3) - 1}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{-x^3/6} = -12 \end{aligned}$$

Esercizio 9

$$f(x) = 2\pi \frac{\cos(2x^2)}{1+x^2} + 2\sin(2\pi x) + 6\pi$$

$$f(0) = 2\pi \frac{\cos 0}{1} + 2\sin(0) + 6\pi = 8\pi$$

$$f'(x) = 2\pi \frac{-4x[\sin(2x^2)](1+x^2) - 2x \cos(2x^2)}{(1+x^2)^2} + 4\pi \cos(2\pi x)$$

$$f'(0) = 4\pi$$

Pertanto, la retta tg ha equazione

$$y - 8\pi = 4\pi x$$

Esercizio 10

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x+1} + \arctan x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1-x^2 + 1+2x+x^2}{(1+x)^2(1+x^2)} \\ &= \frac{2x}{(1+x)^2(1+x^2)} \end{aligned}$$

$$\text{Poiché } f'(x) = 0 \quad \text{e} \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{per } x \geq 0$$

concludiamo che $x=0$ è punto di minimo locale.
Non esistono punti di massimo locale.