

$$\underline{\Delta 1} \quad \int_0^2 \frac{\ln x \cdot \sin x^3}{x^2} dx$$

$$f(x) = \frac{\ln x \cdot \sin x^3}{x^2}$$

L'unico punto di singolarità per la funzione è $x=0$

Nell'intorno di $x=0$, abbiamo

$$\text{pp } f(x) = \frac{x^3 \cdot \ln x}{x^2} = x \ln x$$

Poiché $g(x) = x \ln x$ è integrabile nell'intorno di $x=0$, come è immediato verificare, concludiamo che f è integrabile in $[0, 2]$ o, equivalentemente, che l'integrale converge

$\Delta 2$ Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{1/2} - 1}{(1+x^2) \sin x^2}$$

Poiché

$$\text{pp } (1-t)^{\alpha} = 1 - \alpha t$$

$$\text{pp } \sin t = t$$

abbiamo

$$\text{pp } (1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} x^2$$

$$\text{pp } \sin x^2 = x^2$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{1/2} - 1}{(1+x^2) \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} x^2 - 1}{(1+x^2) x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

A3 Calcolare la retta tangente al grafico della funzione
 $f(x) = \log_3 \left(\frac{x+5}{4x^5+1} \right)$ nel punto di ascisse $x_0 = 0$.

Abbiamo

$$f(x_0) = f(0) = \log_3 5$$

Inoltre

$$f(x) = \log_3(x+5) - \log_3(4x^5+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5} \cdot \frac{1}{\ln 3} - \frac{20x^4}{4x^5+1} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

$$f'(0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

Pertanto

$$r_{\text{tg}}: y - \log_3 5 = \frac{1}{5 \ln 3} x$$

A4 Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$

$$\frac{\arctg(n^{-\beta})}{\ln(1+n^{-2})}$$

Determinare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge

Osserviamo che

$$\ln(1+n^{-2}) \leq n^{-2} \quad \text{per } n \gg 1$$

Pertanto

$$a_n = \frac{\arctg(n^{-\beta})}{\ln(1+n^{-2})} \geq n^2 (\arctg n^{-\beta})$$

Se $\beta = 0$ $a_n \geq \frac{\pi}{4} n^2$ e la serie diverge

Se $\beta < 0$ $a_n \geq \frac{\pi}{2} n^2$ e la serie diverge

Se $\beta > 0$

$$a_n \sim \frac{1}{n^{\beta-2}}$$

e la serie converge
poiché $\beta-2 > 1$, ossia $\beta > 3$

A5 Risolvere il Pb di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3x^2 y(x) + 2e^{x^3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Applicando la formula, l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x, C) &= e^{\int 3x^2 dx} \left[C + \int 2e^{x^3} e^{-\int 3x^2 dx} dx \right] \\ &= e^{x^3} \left[C + \int 2e^{x^3} e^{-x^3} dx \right] \\ &= e^{x^3} [C + 2x] \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ abbiamo

$$1 = e^0 (C + 0) \Rightarrow C = 1$$

Perciò otteniamo

$$y(x) = e^{x^3} [1 + 2x]$$

A6 Calcolare il valore del limite

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\pi n)}{\cos \frac{2}{n} + n^3 \sin \frac{1}{n^4} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^n}{1 + \frac{n^3}{n^4} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} = 0 \end{aligned}$$

A7 Dato $z = 2+i$, calcolare $\operatorname{Im} \left[\frac{z+3}{z+5} + 3 \operatorname{Re}(z\bar{z}) \right]$

Abbiamo

$$\operatorname{Im} \left[\frac{z+3}{z+5} + 3 \operatorname{Re}(z\bar{z}) \right] = \operatorname{Im} \frac{z+3}{z+5} \quad \text{dal momento che}$$

$$\operatorname{Im} [3 \operatorname{Re}(z\bar{z})] = 0$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} \frac{z+3}{z+5} &= \frac{2+i+3}{2+i+5} = \frac{5+i}{7+i} \cdot \frac{7-i}{7-i} \\ &= \frac{35+7i-5i+1}{50} = \frac{36}{50} + \frac{1}{25}i \end{aligned}$$

Quindi

$$\operatorname{Im} \left[\frac{z+3}{z+5} + 3 \operatorname{Re}(z\bar{z}) \right] = \frac{1}{25}$$

AS Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{3x-1}{x^3}$.

Determinare gli eventuali punti di massimo e/o minimo locali per la funzione f e per la funzione $|f|$.

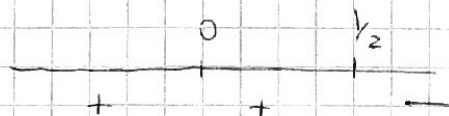
Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

holtre

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^3 - 3x^2(2x-1)}{x^6} = \frac{3x^3 - 6x^3 + 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-3x^3 + 3x^2}{x^6} = \frac{3x^2}{x^6} (1-2x) \\ &= \frac{3}{x^4} (1-2x) \end{aligned}$$

$$f' \geq 0$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$



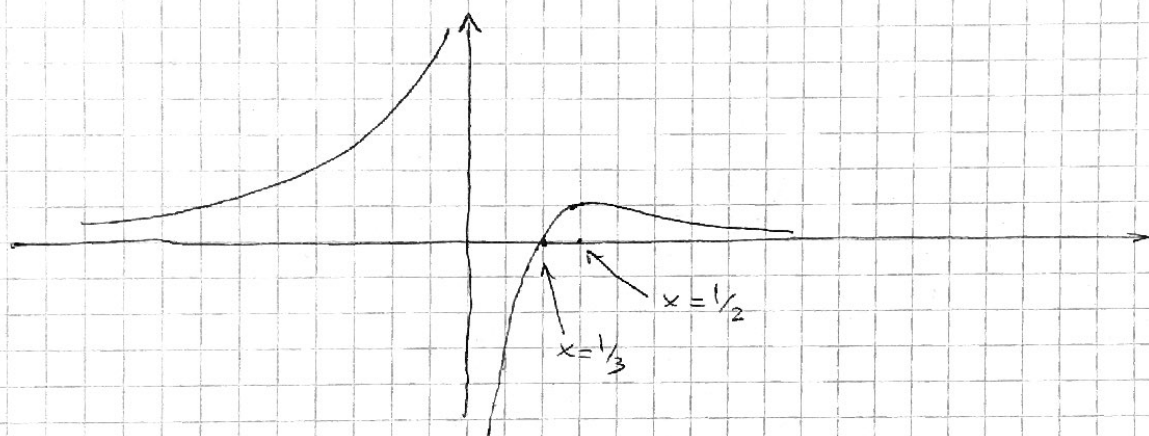
Tenendo conto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

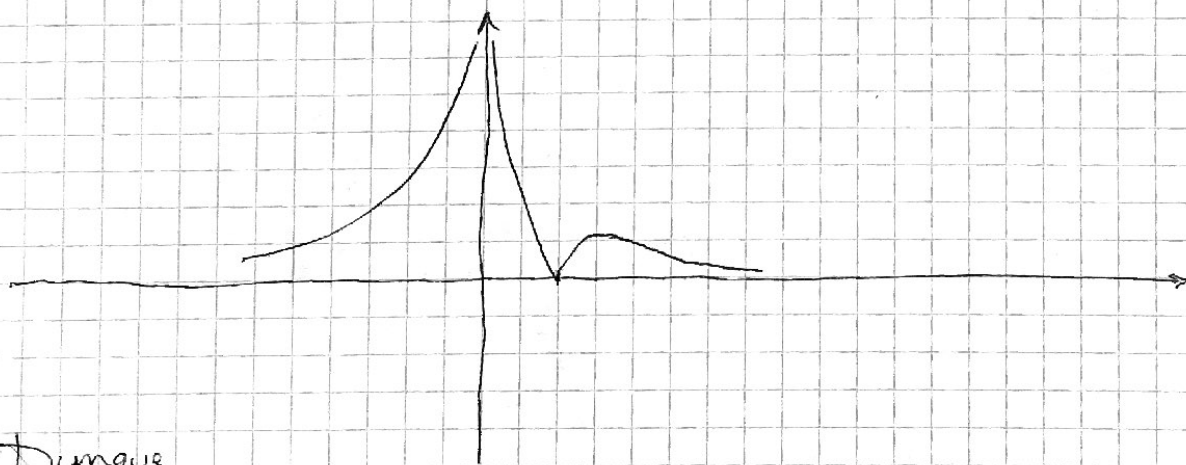
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

il grafico qualitativo di f è quello in figura



mentre quello di $|f|$ è riportato di seguito



Dunque

f : max locale in $x = 1/2$

$|f|$: max locale in $x = 1/2$ e min. locale in $x = 1/3$

A9 $f: (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \ln(\cos(2x))$
Scrivere il polinomio di grado due della f in $x=0$

$$f(0) = \ln(\cos 0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = -\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = -2 \tan 2x \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -2 [1 + \tan^2(2x)] \cdot 2 \quad f''(0) = -4$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P_2(x; 0) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 \\ &= -\frac{4}{2} x^2 = -2x^2 \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si può arrivare in altro modo

Poiché

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\cos s = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4} + o(s^4)$$

abbiamo

$$\ln(\cos(2x)) = \ln\left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) = -2x^2 + o(x^2)$$

A10 Calcolare $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + 8 \cos^2 x} dx$

Se poniamo $2\sqrt{2} \cos x = t \quad -2\sqrt{2} \sin x dx = dt$

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad t = 2\sqrt{2}$$

$$x=\pi/2 \quad \Rightarrow \quad t=0$$

ed otteniamo

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{2\sqrt{2}}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$$

B1 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con f continua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ finito

A: non è detto che esista un punto di massimo; si pensi, ad esempio a $f(x) = \operatorname{arctg} x$

B: analogamente non è detto che esista un punto di minimo; si pensi a $f(x) = \frac{1}{1+x}$

C: Non è possibile che f non sia superiormente limitata; poiché f è ~~compatta~~ ^{continua} in ogni compatto $[0, M]$ con $M > 0$ arbitrario, è limitata ed avendo limite finito a $+\infty$ è globalmente limitata in tutto $[0, +\infty)$

D: Necessariamente è l'unica risposta corretta.

B2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua l.c. $f(0) = 1$

Poiché f è continua in $x=0$, sarà $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 > 0$.

Per il Teorema della permanenza del segno, $\exists \delta > 0$ l.c.

$\forall x \in (-\delta, \delta)$ risulta $f(x) > 0$. La risposta è, dunque, D.

B3 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

Risulta

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Pertanto f è convessa (risposta D) in $(0, +\infty)$

B4 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x/2) & \text{se } x \geq 0 \\ ax + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Perché f sia derivabile in $x=0$, occorre che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} ax+b = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2}$$

Dunque

$$b=0$$

$$a=1/2$$

(risposta B)

B5 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f+g$ e $f-g$ sono integrabili in $[a, b]$.

Per le proprietà dell'integrale

$$f+g+f-g = 2f \text{ è int.} \Rightarrow f \text{ è int.}$$

$$f+g-(f-g) = 2g \text{ è int.} \Rightarrow g \text{ è int.}$$

Quindi la risposta è D

B6 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e b_n una seconda successione t.c.

$$b_n < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$$

Si osservi che b_n può essere negativo.

A: non è detto, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{2n^2}$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$ che converge

B: non è detto, per lo stesso esempio dato sopra.

C: non è detto, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n^2}$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ che diverge

D: Se $b_n > 0$, abbiamo $0 < b_n < \frac{1}{n^2}$

Inoltre, $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \quad |a_n| < 1$. Pertanto

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| b_n$$
 e pur di prendere
 $n \geq \bar{n}$ avremo

$$\left| \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} a_n b_n \right| \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

B7 $a_n = (-1)^n \arctg n$

La successione non converge ma è limitata (risposta B). Infatti $|a_n| < \pi/2$

B8 $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e derivabili in $(0,1)$ con $f(0) > g(0)$ e $f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (0,1)$

Consideriamo $h(x) = f(x) - g(x)$

Essa è continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$

Inoltre $h(0) = f(0) - g(0) > 0$ e $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$
 $\forall x \in (0,1)$. Per il Teorema di Lagrange

$$h(1) - h(0) = h'(\xi) \quad \text{con} \quad \xi \in (0,1)$$

Dunque

$$f(1) - g(1) = \underbrace{h(0)}_{>0} + \underbrace{h'(\xi)}_{>0}$$

che implica

$$f(1) - g(1) > 0 \Rightarrow f(1) > g(1)$$

[risposta D]

B9 $a < b < c < d$, $f: (a,d) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

f è continua in $[b,c]$ e dunque integrabile in tale intervallo (risposta A)

B10 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = z\bar{z}$

Posto $z = x + iy$ risulta $\bar{z} = x - iy$, per cui

$$w = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 > 0 \quad \text{perch\u00e9}$$

z non \u00e9 nullo.

Quindi la risposta \u00e9 necessariamente C.