A1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(5x) + \sin(2x) + 5 & x \leq 0 \\ \ln(1+\alpha x) + \beta & x > 0 \end{cases}$$

Affinché f sia di classe $C^1(\mathbb{R})$ è necessario che

a) f sia di classe C^1 separatamente in $x > 0$ e in $x < 0$

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

c) $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$

Cominciamo da b)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 6 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\beta = 6}$$

Quanto ad a), è chiaro che $\cos^2(5x) + \sin(2x) + 5$ è di classe C^∞ in $(-\infty, 0)$; poiché $\ln(1+\alpha x) + \beta$ sia di classe C^1 in $(0, +\infty)$ è necessario che $\alpha \geq 0$

Infine, venendo a c) abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} -2\sin(5x)\cos(5x) \cdot 5 + 2\cos 2x & x < 0 \\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha x} & x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

A2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(n) + n^2}{n^\alpha - 3\ln(n+1)}$$

Osserviamo che

$$a_n = \frac{n \sin n + n^2}{n^\alpha - 3\ln(n+1)} \sim \frac{n^2}{n^\alpha - 3\ln(n+1)}$$

Se $\alpha = 0$ $\quad a_n \simeq \dfrac{n^2}{-3\ln(n+1)}$ e la serie non converge

Se $\alpha < 0$ $\quad a_n \sim \dfrac{n^2}{-3\ln(n+1)}$ e la serie non converge

Se $\alpha > 0$ $\quad a_n \simeq \dfrac{n^2}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha-2}}$

e perché la serie converga è necessario che $\alpha - 2 > 1$, ossia $\boxed{\alpha > 3}$

A3)
$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx + \int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx + \int_0^1 \frac{(x^3)'}{1+(x^3)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln(1+x^4)\Big|_0^1 + \operatorname{arctg}(x^3)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

A4)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(1+n^2)}{n^2} + 2\,\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{n^2} + 2 \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

$$= 0 + 2 = 2$$

dove abbiamo tenuto conto che $\ln(1+n^2)$ cresce molto più lentamente di n^2 all'infinito, mentre per $n \to +\infty$ $e^n \to +\infty$ e $e^{-n} \to 0$.

A5 $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{e^{-x/2} - \cos\sqrt{x}}$$

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor / Mc-Laurin.

Abbiam

$$\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

da cui

$$e^{-x/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$$

da cui

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{e^{-x/2} - \cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{6}x^2}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^2}{\frac{1}{12}x^2} = \frac{1/6}{1/12} = 2$$

A6] $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

Consideriamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad (\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

Poiché si tratta di una radice reale doppia, l'integrale è dato da

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

da cui

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x}$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo

$$y(0) = 1 \implies C_1 = 1$$

$$y'(0) = 0 \implies -2 + C_2 = 0 \implies C_2 = 2$$

Pertanto, la soluzione cercata è

$$y = e^{-2x} + 2x e^{-2x}$$

A7] $z^4 + 4 = 0$

$$z^4 = -4 \qquad -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Le quattro radici, dunque, sono date da

$$z_k = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right] \quad k = 0,1,2,3$$

da cui

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1-i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-i$$

A8| $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}+1\right)$

$$f(-1) = \operatorname{arctg}(-2+1) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}+1\right)^2}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}+1}\left(-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{4+4x+2x^2}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{-2}{2x^2+4x+4}$$

$$f'(-1) = \frac{-2}{2+4-4} = -1$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente è

$$y + \frac{\pi}{4} = -(x+1)$$

$$y = -(x+1) - \frac{\pi}{4}$$

A9|

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{x^{1/2}}}{(1+4x)^{3\alpha} + \ln(1+4x)}\,dx$$

L'unico "punto" in cui occorre studiare il comportamento di f è $+\infty$.

Osserviamo che per $x \to +\infty$

$$f(x) \simeq \frac{2}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{(4x)^{3\alpha}} = \frac{1}{4^{3\alpha}} \frac{1}{x^{3\alpha+1/2}}$$

Affinché l'integrale converga, deve essere

$$3\alpha + \frac{1}{2} > 1 \qquad 3\alpha > \frac{1}{2} \qquad \boxed{\alpha > \frac{1}{6}}$$

A10) $f : (2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = -\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x-2}}$

Osserviamo che in $(2, +\infty)$ f è sempre negativa.
Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

Se consideriamo la derivata prima, abbiamo

$$f'(x) = -\frac{2(x-1)\sqrt{x-2} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}(x-1)^2}{x-2}$$

$$= -\frac{4(x-1)(x-2) - (x-1)^2}{2(x-2)^{3/2}} = -\frac{x-1}{2(x-2)^{3/2}}(4x-8-x+1)$$

$$= \underbrace{-\frac{x-1}{2(x-2)^{3/2}}}_{<0 \text{ in } (2,+\infty)} (3x-7)$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad x \leq \frac{7}{3}$$

Abbiamo, dunque, un massimo locale in $x=\frac{7}{3}$.

B1| $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotona crescente. Ciò significa che

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1)\geq f(x_2)$$

ossia

$$x_1 - x_2 > 0 \implies f(x_1) - f(x_2) \geq 0$$

Facendo il quoziente, otteniamo

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0.$$

Non sappiamo se f è derivabile, quindi A e B non sono necessariamente verificate e non sappiamo neppure se f è continua, quindi D va esclusa

---

B2| Se $a_n > 0$ $\forall n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ esiste finito, $l\geq 0$. Non è detto che $l>0$, basta pensare alla successione $a_n=\frac{1}{n}$ che ha limite $l=0$

B3| $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, f continua in $[a,b)$.
Poiché f in particolare è continua in $x=a$, sarà

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Pensando a $f(x)=\frac{1}{x-b}$ oppure $f(x)=\frac{1}{b-x}$ è chiaro che f non può essere inferiormente o superiormente limitata.

Poichè f non è continua in tutto $[a,b]$, il Teorema del valore intermedio non vale e D è da escludere

---

B4) Consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ e poniamo $M = \sup|b_n|$ che è finito per ipotesi.

Avremo

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |b_n|$$
$$\leq M \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$
$$< +\infty$$

perchè $\sum |a_n|$ converge. Quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge

---

B5) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ derivabile t.c. $f(1) \geq f(x)$ $\forall x \in [0,2]$. Quindi $x = 1$ è un punto di massimo per f derivabile. Pertanto $f'(1) = 0$.

B6) $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, f continua con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l > 0$

Pertanto

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, x^{\alpha}\, dx$$

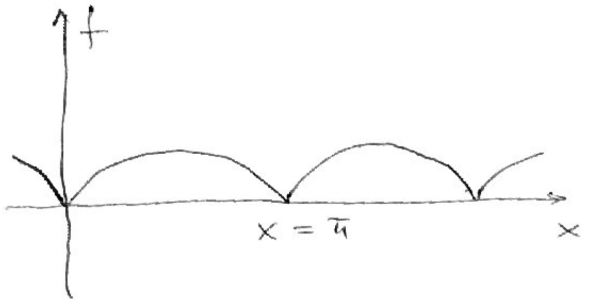
converge se il comportamento all'infinito è integrabile.

Abbiamo per $x \to +\infty$

$$f(x)\, x^{\alpha} \sim \frac{l}{x^{-\alpha}}$$

e per avere convergenza, occorre e basta che $-\alpha > 1$, ossia $\alpha < -1$

B 7) $f(x) = g \circ h(x) = |\sin x|$ che ha il grafico in figura



È chiaro che in $x = \pi$, f è continua e non derivabile.

B8) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(a_n)$ converge.

Allora, per la CN di convergenza, $\lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = 0$

B9) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, continua e derivabile in $x = 0$.

Per definizione di derivata

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

B10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$.

Per il Teorema fondamentale del Calcolo

$$G'(x) = f(x^2)\, 2x$$