A1] Determinare (graficamente) quante soluzioni ammette l'equazione

$$-|x| = \ln(1+3x)$$

Se poniamo

$$y_1 = -|x|$$

$$y_2 = \ln(1+3x)$$

si tratta di tracciare i grafici di y_1 e y_2 e determinare il numero dei punti di intersezione

Osserviamo che $y_2(0) = 0$.

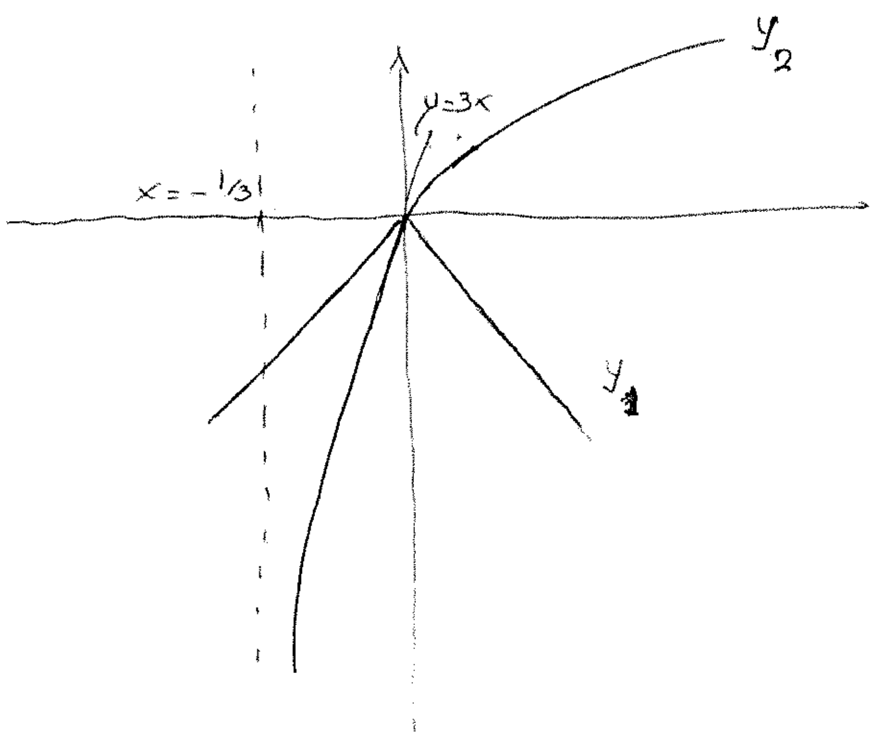
Inoltre

$$y_2(x) \simeq 3x \quad \text{per } x \to 0$$

e

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} y_2 = -\infty$$

I grafici sono dunque come in figura e l'unica intersezione si ha in $x = 0$.



A2] $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = -x\cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x$$

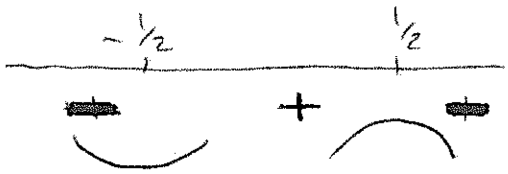
$$= \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

A3] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x e^{-2x^2}$

È facile verificare che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Inoltre

$$f'(x) = e^{-2x^2} - 4x^2 e^{-2x^2}$$
$$= e^{-2x^2}(1 - 4x^2)$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad (1 - 4x^2) \geq 0 \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$



Quindi $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo e $x = +\frac{1}{2}$ è punto di massimo. Che siano assoluti è conseguenza di $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

A4] Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + 2^n}{n^3 + 3^n}$$

Osserviamo che $$\frac{a^n + 2^n}{n^3 + 3^n} \sim \frac{a^n + 2^n}{3^n}$$

Pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + 2^n}{n^3 + 3^n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + 2^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Affinché la serie converge, pertanto, è necessario e basta che

$$\left|\frac{a}{3}\right| < 1 \implies -3 < a < 3$$

<u>A5</u> $F : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{1}{2} + t^3\right) dt$

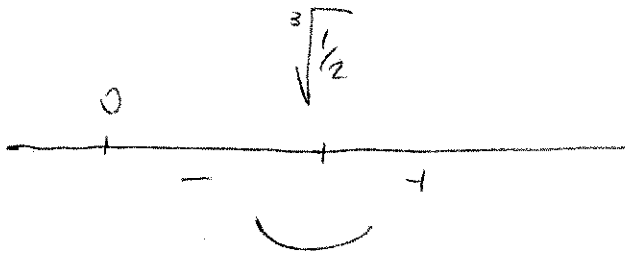
Osserviamo che $F(0) = 0$.
Inoltre, è facile controllare che F è di classe C^∞ in $(0, +\infty)$
Per il Teorema fondamentale del Calcolo

$$F'(x) = \ln\left(\frac{1}{2} + x^3\right)$$

$$F'(x) \geq 0 \qquad \ln\left(\frac{1}{2} + x^3\right) \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + x^3\right) \geq 1$$

$$x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

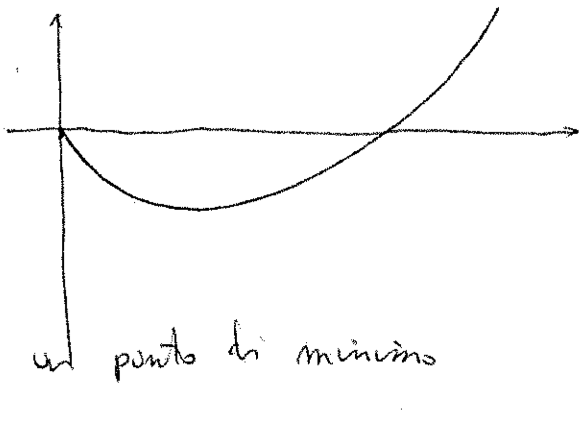


Osserviamo inoltre che $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

$$F(x) = \ln\frac{1}{2}\, x \quad \text{per } x \to 0$$

$$= -(\ln 2)\, x \quad \text{per } x \to 0$$

Il grafico, dunque, è quello in figura ed è evidente che in $x = 0$ abbiamo un punto di massimo e in $x = \sqrt[3]{1/2}$ abbiamo un punto di minimo



A6 Ricordiamo che

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0$$
$$\sin t = t + o(t) \quad \text{per } t \to 0$$

Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{3^2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{\sin\left(\frac{5}{x^2}\right) + \frac{e^{1/x}}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{9}{2x^2}\right) - \frac{9}{x^2}}{\frac{5}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{9}{2x^2}}{\frac{5}{x^2}} =$$

$$= -\frac{9}{10}$$

A7 Si consideri $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x \ln(e^4 x)$.
Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 nel punto 1.

È facile verificare che f è di classe C^∞ in $(0,+\infty)$.
Abbiamo

$$P_2(x,1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(x) = x\left[\ln e^4 + \ln x\right] = x\left[4 + \ln x\right]$$
$$= 4x + x \ln x$$

$$f'(x) = 4 + \ln x + 1 = 5 + \ln x$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Pertanto $\quad f(1) = 4, \quad f'(1) = 5 \quad f''(1) = 1$

$$P_2(x,1) = 4 + 5(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$$

A8] Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2[\cos \pi n + \sin 4n]}{e^n + (n+1)^4} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2[\cos \pi n + \sin 4n]}{e^n} = 0$$

Infatti $\cos \pi n + \sin 4n$ è limitato e l'esponenziale a denominatore diverge più rapidamente di n^2.

A9] Posto $w = -4i$, $z = \sqrt[3]{w}$

Poiché, per w, abbiamo $\rho = 4$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$, per z abbiamo

$$\rho = \sqrt[3]{4}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}, \ \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}$$

A10] $y = 2e^{\cos x} - y \sin x$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine.

Abbiamo

$$y = e^{-\int \sin x \, dx} \left[C + \int 2e^{\cos x} e^{\int \sin x \, dx} dx \right]$$

$$= e^{\cos x} \left[C + \int 2 e^{\cos x} e^{-\cos x} dx \right]$$

$$= e^{\cos x} [C + 2x]$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = e$, abbiamo

$$e = e^{\cos 0} [C] \implies C = e/e = 1$$

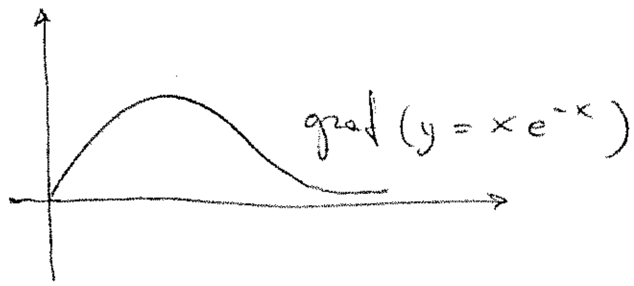
Pertanto la soluzione è $y = e^{\cos x} [1 + 2x]$

B1) Per definizione di Polinomio di McLaurin di ordine 3, abbiamo

$$f(x) = p(x) + o(x^3) \qquad [\text{risposta } D]$$

B2) Per definizione di continuità, $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in (a,b)$ se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
[risposta A]

B3) $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$



È chiaro che la funzione è limitata [risposta B]

B4) $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua. Per il Teorema della Media, esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$g(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt$$

ossia

$$g(c)(b-a) = \int_a^b g(t)\,dt \qquad [\text{risposta } A]$$

B5) $a_n > 0$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, L finito, $L \neq 0$

Poiché $f(t) = \frac{t}{1+t}$ è continua in $[0,+\infty)$, concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{L}{1+L} \qquad [\text{risposta } C]$$

B6) $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua in $[0,+\infty)$ tale che $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Per ogni $M>0$, l'intervallo $[0, M]$ è chiuso e limitato; inoltre, f è continua in tale intervallo e, dunque, integrabile. Pertanto

$$\int_0^M f(x)dx \quad \text{è finito} \quad \forall M>0 \qquad [\text{risposta C}]$$

B7) Sia a_n una successione tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Per la CN di convergenza osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists M>0 \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M.$$

Pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\sin a_n}{(n+1)^2}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin M|}{(1+n)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

e per il criterio del confronto, la serie converge assolutamente e, dunque, converge [risposta C]

B8)

$$f(x) = \begin{cases} b\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} x & x > 1 \end{cases}$$

Perché f sia continua occorre che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} b\sqrt{x} = \lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg} x = b$$

da cui otteniamo

$$b = \frac{\pi}{4} \qquad [\text{risposta B}]$$

B9 $f:[0,1) \to \mathbb{R}$ strettamente crescente

Poichè f è strettamente crescente in $x=0$ ha il minimo.
Se consideriamo

$$f:[0,1) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

è chiaro che in generale f non ha massimo [risposta A]

B10 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, derivabile t.c. $f(0)=0$, $f(1)=1$

Per il Teorema di Lagrange, $\exists\, c \in (0,1)$ t.c.

$$f(1) - f(0) = f'(c)(1-0)$$

$$f'(c) = 1 \qquad \text{[risposta B]}$$