A1

$$A = \mathrm{Re}\left[\frac{z+4}{z+1} + 2\,\mathrm{Im}(z\bar{z})\right] \quad \text{dove} \quad z = 3+2i$$

Osserviamo che $z\bar{z} = (3+2i)(3-2i) = 9+4 = 13 \in \mathbb{R}$.

Quindi $\mathrm{Im}(z\bar{z}) = 0$ e possiamo concludere che

$$A = \mathrm{Re}\left(\frac{z+4}{z+1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{3+2i+4}{3+2i+1}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{7+2i}{4+2i}\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{(7+2i)(4-2i)}{16+4}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{28+4}{20} + i\,\frac{8-14}{20}\right) = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$$

A2

$$f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = (x-2)^2 + \mathrm{arctg}\,\frac{2}{x}.$$

$$P_2(x;2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2$$

Pertanto

$$f(2) = (2-2)^2 + \mathrm{arctg}\,\frac{2}{2} = \mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = 2(x-2) + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\left(-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$= 2(x-2) + \frac{x^2}{x^2+4}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = 2(x-2) - \frac{2}{x^2+4}$$

$$f'(2) = -\frac{2}{4+4} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = 2 + 2\,\frac{2x}{(x^2+4)^2} \qquad f''(2) = 2 + \frac{8}{64}$$

$$= 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8}$$

Dunque

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{17}{8}\,\frac{1}{2}(x-2)^2$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{17}{16}(x-2)^2$$

<u>A3</u> $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x^2)^{1/3} - 1}{\operatorname{arctg} x^2} = \left(\begin{array}{l}\text{utilizzando i} \\ \text{noti sviluppi}\end{array}\right) =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{3}(2x^2) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^2}{x^2} = \frac{2}{3}.$$

<u>A4</u> $\begin{cases} u' = 2x\,u + (\cos x)e^{x^2} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Ricaviamo, prima, la soluzione generale, in dipendenza dalla costante arbitraria. Abbiamo

$$u(x) = e^{\int 2x\,dx}\left[C + \int (\cos x)\, e^{x^2}\, e^{-\int 2x\,dx}\, dx\right]$$

$$= e^{x^2}\left[C + \int \cos x\, \cancel{e^{x^2}} \cdot \cancel{e^{-x^2}}\, dx\right]$$

$$= e^{x^2}\left[C + \sin x\right]$$

Imponendo, ora, la condizione iniziale $u(0)=1$, abbiamo

$$1 = e^0 \left[C + \sin 0 \right] \implies C = 1$$

Pertanto

$$u(x) = e^{x^2} (1 + \sin x)$$

<u>A5</u> $$f(x) = \frac{1}{\ln(7x)} - 2$$

L'equazione della retta tangente al grafico della f in $x_0 = \frac{e}{7}$ ha espressione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Pertanto

$$f'(x) = -\frac{1}{[\ln(7x)]^2} \frac{1}{x}$$

$$f'\left(\frac{e}{7}\right) = -\frac{1}{(\ln e)^2} \cdot \frac{7}{e} = -\frac{7}{e}$$

$$f\left(\frac{e}{7}\right) = \frac{1}{[\ln e]^2} - 2 = -1$$

e concludiamo che

$$r_{tg}: \quad y + 1 = -\frac{7}{e}\left(x - \frac{e}{7}\right) \implies y = -\frac{7}{e}x$$

A6 Si calcoli $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{1+2^2e^{2t}}\,dt$.

Abbiamo

$$\int_1^2 \frac{e^t}{1+2^2e^{2t}}\,dt = \int_1^2 \frac{e^t}{1+(2e^t)^2}\,dt \quad \left(\begin{array}{lll} e^t = s & t=1 & s=e \\ e^t dt = ds & t=2 & s=e^2 \end{array}\right)$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{ds}{1+4s^2} = \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{d(2s)}{1+(2s)^2} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg}(2s)\Big]_e^{e^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} 2e^2 - \operatorname{arctg} 2e\right)$$

A7 Sia $\alpha > 0$ un parametro reale. Determinare per quali valori di α converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{(\alpha^n+1)(\alpha^n+2)}$$

Osserviamo che $\forall\ \alpha > 0$

$$(\alpha^n+1)(\alpha^n+2) \geq 1\cdot 2 = 2 > 1$$

Pertanto

$$\frac{(1/2)^n}{(\alpha^n+1)(\alpha^n+2)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Poiché la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, per il criterio del confronto concludiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{(\alpha^n+1)(\alpha^n+2)}$ converge $\forall \alpha > 0$.

A8 Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(-n) \frac{\ln(1+2n^{-3})}{\sin(n^{-3})}$.

Secondo sviluppi noti, abbiamo

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(-n) \frac{\ln(1+2n^{-3})}{\sin(n^{-3})} =$$

$$= \left[\lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(-n)\right]\left[\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^{-3}}{n^{-3}}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot 2 = -\frac{\pi}{2} \cdot 2 = -\pi$$

A9 Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} \operatorname{arctg}(x+\pi)}{x^2+1} dx \text{ converge}$$

Osserviamo che $f(x) = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{arctg}(x+\pi)}{x^2+1}$ è continua in tutto $[2, +\infty)$. Pertanto è sufficiente studiare il comportamento all'infinito per determinare la convergenza o meno dell'integrale.

Abbiamo in generale in $[2,+\infty)$

$$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{e^{\alpha x}}{x^2} \quad , \quad f(x) > \frac{(\operatorname{arctg}\pi)e^{\alpha x}}{2x^2}$$

Se $\alpha = 0$ $\quad |f(x)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}$ Poiché $\frac{1}{x^2}$ è integrabile a $+\infty$, per il criterio del confronto lo è anche f

Se $\alpha < 0$ $\quad |f(x)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{e^{-|\alpha|x}}{x^2} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}$ e per gli stessi motivi del punto precedente f è integrabile a $+\infty$.

Se $\alpha > 0$ $\quad f(x) > \frac{(\operatorname{arctg}\pi)e^{\alpha x}}{2x^2}$ e poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{arctg}\pi)e^{\alpha x}}{2x^2} = +\infty,$$ concludiamo che f non può essere integrabile.

Pertanto, l'integrale converge $\forall\, \alpha \leq 0$.

<u>A10</u> $f:[0,\frac{3}{4}\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2\sin^2 x$. Determinare i punti di massimo e minimo (stabilendo se locale o globale) di f nel suo dominio

Abbiamo

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = -2\left(\sin \tfrac{3}{4}\pi\right)^2 = -2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -2 \cdot \tfrac{2}{4} = -1$$

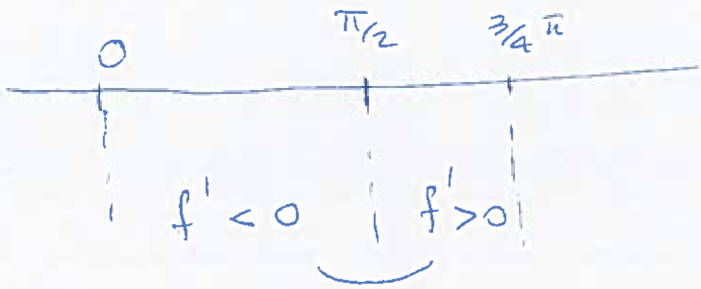
Inoltre

$$f'(x) = -4 \sin x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \qquad -4 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad x = 0,$$

$$\cos x = 0 \qquad x = \pi/2$$



Quindi in $x = \pi/2$ abbiamo un punto di minimo locale

Inoltre

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = -2$ che è anche il <u>minimo globale</u>

La funzione in $x = 0$ assume il valore zero che è il <u>massimo globale</u> (infatti, f non può mai essere positiva)

Infine, sempre dal precedente studio della derivata prima, concludiamo che $f(\frac{3}{4}\pi) = -1$ è un massimo locale.

B1 Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_n$ con $a_n > 0$.

Se la serie converge, allora per la CN di convergenza $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (risposta D)

Si ricorda che il criterio di Leibnitz per la convergenza delle serie a termini alterni è solo condizione sufficiente

---

B2 Sia a_n una successione di numeri reali t.c.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 5$.

Allora, ricordiamo che per la definizione di limite,

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \ n_\epsilon > 0$ t.c. $\forall n > n_\epsilon \quad |a_n - 5| < \epsilon$

Osserviamo che
$$|a_n - 5| < \epsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$5 - \epsilon < a_n < 5 + \epsilon$$

Se scegliamo $\epsilon = 4$, concludiamo che esiste $\overline{n}$ t.c.

$\forall n > \overline{n}$
$$a_n > 1 \qquad \text{(che è la risposta C)}$$

<u>B3</u> Si consideri $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, continua, derivabile, convessa. Se in $c\in(a,b)$ risulta $f'(c)=0$, allora osserviamo che, per la convessità di f

$$\forall x\in(a,b) \qquad f(x)\geq f(c)+f'(c)(x-c)$$

ossia, poiché $f'(c)=0$

$$\forall x\in(a,b) \qquad f(x)\geq f(c).$$

Si tratta, dunque, per c di un punto di minimo assoluto (<u>risposta c</u>)

<u>B4</u> Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua con $f(a)>0$ e $f(b)<0$. Allora, per il Teorema degli zeri, esiste $c\in(a,b)$ t.c. $f(c)=0$ e $\forall x\in[c,b)$ $f(x)\leq 0$.

Pertanto $\exists\ c\in(a,b)$ t.c.

$$\int_c^b f(x)\,dx\leq 0$$

(<u>risposta C</u>)

<u>B5</u> Siano $z,w\in\mathbb{C}$. Allora

$$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$$

(<u>risposta B</u>)

per le caratteristiche dell' operazione di coniugio

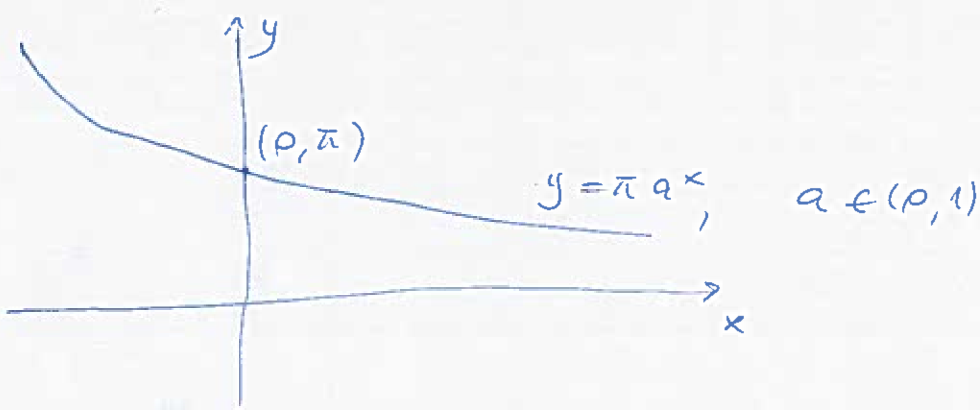
B6 Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{1}{n}$. Allora, posto $a_n = \frac{1}{n}$, osserviamo che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

Pertanto la serie converge per il criterio di Leibnitz (risposta B)

B7 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \pi a^x$ con $0 < a < 1$. Allora, considerando il grafico



f è decrescente (risposta B)

B8 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente

Allore

$$\lim_{x\to 0} f = \lim_{x\to 0^+} f = f(0)$$

per la continuità e

$\lim_{x\to 0^+} g$ esiste finito perché g è crescente in tutto $\mathbb{R}$ (non è detto che esista $\lim_{x\to 0} g$, perché non è detto che g sia continua).

Pertanto, sommando

$\lim_{x\to 0^+} (f+g)(x)$ esiste (risposta A)

B9 Sia $f:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$ continua e $g:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $g(x)=f(x^2)$. Sia $x_0\in(0,1)$, allora

$\lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0^2)$ per le proprietà della f composta e la continuità di f.

(risposta C)

B10 Si consideri $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) con $f(a)<0$, $f(b)>0$.

Allore, per il Teorema di Lagrange, $\exists\, c\in(a,b)$ t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Poiché $f(b) > 0$ e $f(a) < 0$ ($b > a$ banalmente) è chiaro che $f'(c) > 0$.

Pertanto, in corrispondenza di tale c, avremo

$$\underbrace{[f(b) - f(a)]}_{>0} \cdot \underbrace{f'(c)}_{>0} > 0$$

(risposta B)