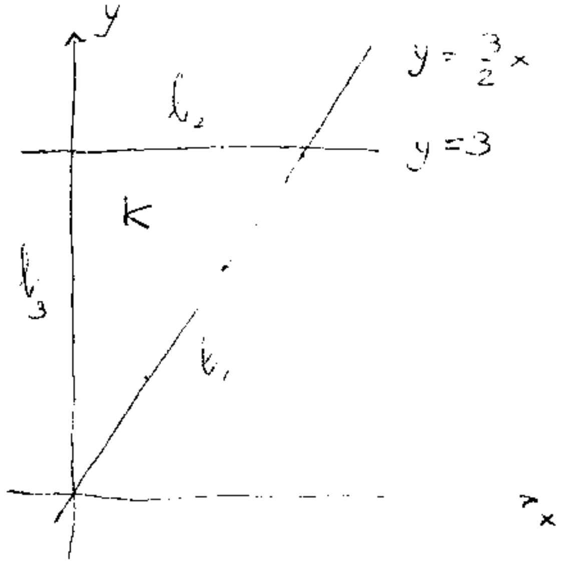
(1)



$f = 9x^2 + 4y^2$

$\nabla f = (18x,\ 8y)$

Poiché $\nabla f = 0$ nell'origine, che è punto del bordo di K, il massimo ed il minimo assoluti sono sicuramente sul bordo

$l_1 : \quad y = \frac{3}{2}x \qquad x \in [0,2]$

$f|_{l_1} = 9x^2 + 4\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 18x^2 \qquad m_1 = 0 \qquad M_1 = 72$

$l_2 : \quad y = 3 \qquad x \in [0,2]$

$f|_{l_2} = 9x^2 + 36 \qquad m_1 = 36 \qquad M_2 = 72$

$l_3 : \quad x = 0 \qquad y \in [0,3]$

$f|_{l_3} = 4y^2 \qquad m_3 = 0 \qquad M_3 = 36$

$m = \min\{m_1, m_2, m_3\} = 0$

$M = \max\{M_1, M_2, M_3\} = 72$

---

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$

$$D_{\underline{v}} f(2,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(2 + t\sqrt{3}/2,\ 1 + t/2\right) - f(2,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{\left(2 + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^2} - e^3}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} e^3 \left[\frac{e^{2\sqrt{3}t - t + \frac{3}{4}t^2 - \frac{t^2}{4}} - 1}{t} \right]$$

[redacted]

$$= \lim_{t \to 0} e^3 \frac{2\sqrt{3}t - t + \frac{1}{2}t^2}{t} = e^3(2\sqrt{3} - 1)$$

---

③ $y' = \frac{9-y^2}{4-x^2}$: si tratta di una equazione a variabili separabili

Due I.P. sono dati dalle rette

$$y = \pm 3$$

ottenute cercando gli zeri di $9-y^2$. Gli altri integrali particolari si ottengono separando le variabili. Quindi

$$\int \frac{dy}{9-y^2} = \int \frac{dx}{4-x^2} + C$$

Osserviamo che

$$\int \frac{1}{a^2-t^2}\,dt = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a-t} + \frac{1}{a+t}\right)dt = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right|$$

Quindi

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+y}{3-y}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$$

$$\ln\left|\frac{3+y}{3-y}\right|^2 = \ln k\left|\frac{2+x}{2-x}\right|^3$$

$$\left|\frac{3+y}{3-y}\right|^2 = k\left|\frac{2+x}{2-x}\right|^3$$

Imponendo la condizione iniziale abbiamo

$$\left|\frac{3}{3}\right|^2 = k\left|\frac{2}{2}\right|^3 \Longrightarrow k = 1$$

L'unica soluzione del Pb di Cauchy è, dunque,

$$\left|\frac{3+y}{3-y}\right|^2 = \left|\frac{2+x}{2-x}\right|^3$$

[redacted]

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2 \ln(n+2)}$

Utilizzando il criterio del rapporto, è facile vedere che $R = 1$

Quindi sicuramente la serie converge per $-1 < x < 1$.

Inoltre, se $x = 1$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \ln(n+2)} \quad \text{convergente}$$

Se $x = (-1)$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 \ln(n+2)} \quad \text{convergente}$$

Dunque

$$I = J = [-1, 1]$$

---

(5) $$\int_\Gamma 2x \, d\sigma_1 = \int_0^1 2x \sqrt{1 + (2x)^2} \, dx =$$

$$= \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \begin{pmatrix} 1 + 4x^2 = t \\ 8x\,dx = dt \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \int_1^5 \sqrt{t} \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2}{3} \left[t^{3/2} \right]_1^5 = \frac{1}{6} \left(5^{3/2} - 1 \right)$$

---

(6) $f = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} - 3$ è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^3$

Inoltre

$$f(2, 3, 4) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$$

$$\nabla f = \left(\frac{x}{2}, \frac{2}{9} y, \frac{z}{8} \right)$$

$$\nabla f(2, 3, 4) = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right)$$

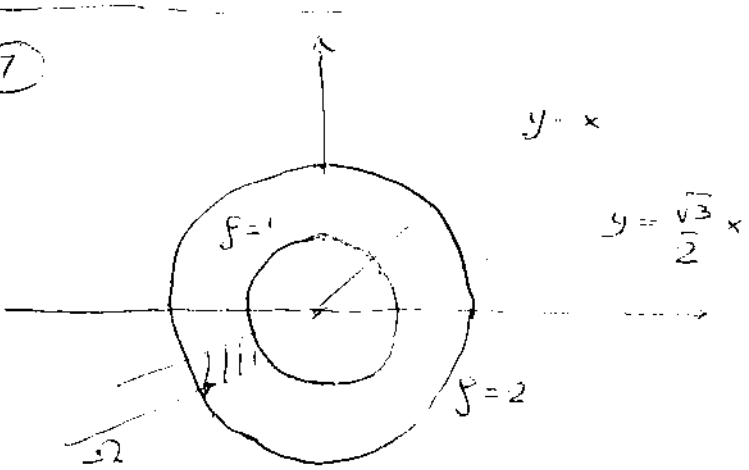
[redacted]

Poichè ciascuna delle 3 componenti del gradiente non si annulla, per il Teo di Dini possiamo concludere che f è univocamente risolubile rispetto a ciascuna delle 3 variabili. La direzione della normale è data proprio dal vettore gradiente. Quindi:

$$n: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + \frac{2}{3}t \\ z = 4 + \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

---

(7)



$$\Omega: \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ \theta_1 \le \theta \le \frac{5}{4}\pi \end{cases}$$

dove

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\cos\theta_1 = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

Quindi

$$\int_{\Omega} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{\theta_1}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_1^2 \frac{\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\rho^2} \rho\, d\rho$$

$$= \int_{\theta_1}^{\frac{5}{4}\pi} \cos 2\theta\, d\theta \int_1^2 \rho\, d\rho = \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta_1}^{\frac{5}{4}\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\sin\theta\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\frac{5}{4}\pi} = \frac{3}{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{7}\right]$$

[redacted]

(8) π_{tg} $\quad z - f(\sqrt{2}, 2) = f_x(\sqrt{2}, 2)\,(x - \sqrt{2}) +$

$$+ f_y(\sqrt{2}, 2)\,(y - 2)$$

$f(\sqrt{2}, 2) = \sin(2 - 2) = 0$

$f_x = 2x\cos(x^2 - y) \qquad f_x(\sqrt{2}, 2) = 2\sqrt{2}$

$f_y = -\cos(x^2 - y) \qquad f_y(\sqrt{2}, 2) = -1$

Dunque

$\pi_{tg}: \quad z = 2\sqrt{2}\,(x - \sqrt{2}) - (y - 2)$

[redacted]