① $f = y e^{x^2+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}, t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{t\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

---

② $f = y\, e^{x^2-y}$

$$\nabla f = \left(2xy\, e^{x^2-y},\ e^{x^2-y}(1-y)\right)$$

$\nabla f = 0$ $\quad \begin{cases} 2xy\, e^{x^2-y} = 0 \\ e^{x^2-y}(1-y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ Quindi il gradiente si annulla in $(0,1) \in K$. Passando alle derivate seconde, abbiamo

$$f_{xx} = 2y\, e^{x^2-y} + 4x^2 y\, e^{x^2-y} = 2y(1+2x^2)\, e^{x^2-y}$$

$$f_{xy} = 2x\, e^{x^2-y} - 2xy\, e^{x^2-y} = 2x\, e^{x^2-y}(1-y)$$

$$f_{yy} = -e^{x^2-y}(1-y) - e^{x^2-y} = e^{x^2-y}(y-2)$$

$$H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & -e^{-1} \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice è indefinita (gli autovalori hanno segno opposto) il punto è di colle. necessariamente, dunque massimo e minimo assoluti (che esistono perché f è continua nel compatto K) si trovano su ∂K. Abbiamo

$\partial K: \quad x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad x^2 = 2y - y^2 \qquad y \in [0,2]$

Quindi

$$f\big|_{\partial K} = y\, e^{2y-y^2-y} = y\, e^{y-y^2} = g(y)$$

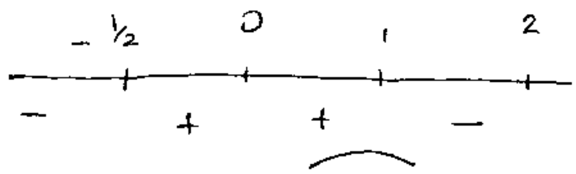
Cerchiamo massimo e minimo assoluti di g in $[0,2]$.

Risulta

$$g' = e^{y-y^2} + y(1-2y)\, e^{y-y^2}$$
$$= e^{y-y^2}(1+y-2y^2)$$

$$g' \geq 0 \qquad 1+y-2y^2 \geq 0 \qquad 2y^2-y-1 \leq 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Quindi $\quad M = g(1) = 1$

Inoltre $\quad g(0) = 0$

$g(2) = 2e^{-2} \implies m = g(0) = 0.$

---

③ $\quad \underline{z}' = A z \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -5 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \qquad (\lambda-6)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -1$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 5\alpha - 2\beta = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\cancel{h}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \alpha+\beta=0 \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$

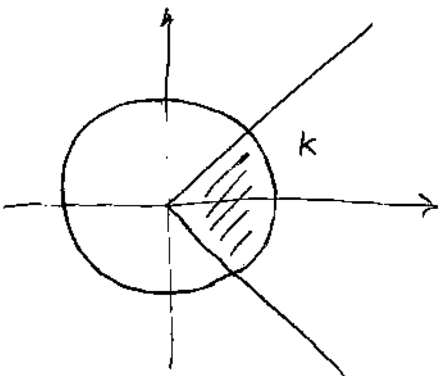
$h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 2e^{6x} & e^{-x} \\ 5e^{6x} & -e^{-x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ è l'integrale generale cercato

---

(4) $\displaystyle\int_\Sigma \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{1+4z}}\, d\sigma_2 = \int_K \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dx\, dy$

$\displaystyle = \int_K \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\cancel{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}} \cancel{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dx\, dy = \int_K \ln(1+x^2+y^2)\, dx\, dy$



$K: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Quindi otteniamo

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^1 \rho \ln(1+\rho^2)\, d\rho = \begin{pmatrix} 1+\rho^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \end{pmatrix}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\, dt = \frac{\pi}{4}\Big[t\ln t - t \Big]_1^2 = \frac{\pi}{4}\Big[2\ln 2 - 2 + 1\Big]$

---

(5) Poniamo $x-2=t$ ed otteniamo

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n^2 \ln n}$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = 1$$

Quindi la serie converge assolutamente e semplicemente in $|t| < 1$. Inoltre se $t = \pm 1$, abbiamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^n}{n^2 \ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} < +\infty$$

Quindi l'insieme di convergenza assoluta e semplice è $|t| \leq 1$. Ritornando ad x, abbiamo

$$-1 \leq x-2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Perciò

$$I = J = [1, 3]$$

6

$$\sigma_1(\Gamma) = \int_0^{3\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{3\pi} \sqrt{x'^2 - y'^2}\, dt$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{\left(-\sin\frac{t}{3} + \sin t\right)^2 + \left(\cos\frac{t}{3} - \cos t\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^2\frac{t}{3} + \sin^2 t - 2\sin t \sin\frac{t}{3} + \cos^2 t + \cos^2\frac{t}{3} - 2\cos t\cos\frac{t}{3}}\, dt$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{2 - 2\left(\cos t \cos\frac{t}{3} + \sin t \sin\frac{t}{3}\right)}\, dt = \int_0^{3\pi} \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2}{3}t\right)}\, dt$$

$$= 2\int_0^{3\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos 2/3\, t}{2}}\, dt = 2\int_0^{3\pi} \sin\frac{t}{3}\, dt = 2 \cdot 3 \left[-\cos\frac{t}{3}\right]_0^{3\pi}$$

$$= 6\,[1+1] = 12.$$

(7) $f = x^3+y^3-x^2+y^2$ è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$

Inoltre

$f(0,-1) = -1+1=0$

$f_y = 3y^2+2y \qquad f_y(0,-1) = 3-2 = 1 \neq 0$

Possiamo dunque applicare il Teorema di Dini e concludere che $f=0$ è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno di $(0,-1)$. Quanto alla retta tangente, risulta

$f_x = 3x^2-2x \qquad f_x(0,-1) = 0$

$r_{tg}: \quad f_x(0,-1)\,x + f_y(0,-1)(y+1) = 0$

$y+1=0.$

---

(8) $f = y\cos(x^2+y)$

f è di classe C^∞, quindi per la C.S. di differenziabilità è sicuramente differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$, e dunque anche nell'origine.

$\pi_{tg}: \quad z - f(0,0) = f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y$

$f_x = -2xy\sin(x^2+y)$

$f_y = \cos(x^2+y) - y\sin(x^2+y)$

$f_x(0,0)=0 \qquad f_y(0,0) = 1 \qquad f(0,0)=0$

$\pi_{tg}: \quad z=y.$