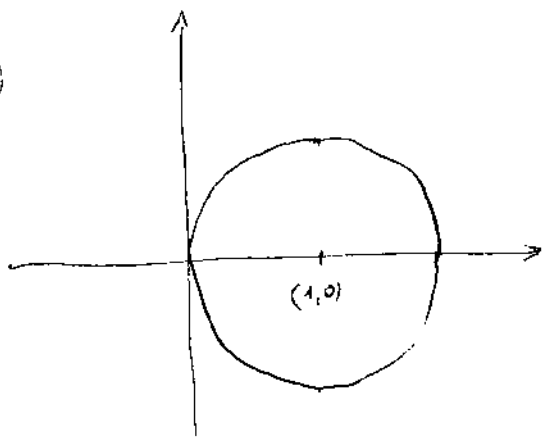


$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}, t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t e^{\frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t}}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

②



Il compatto K è il cerchio che ha centro in $(1,0)$ e raggio 1. È, dunque, tutto contenuto nel semipiano $\{x \geq 0\}$

Osserviamo che in tale semipiano risulta $f \geq 0$ e $f(0,0) = 0$

Perciò, l'origine è punto di minimo per f in K e risulta $m = 0$.

Cerchiamo, dunque, il massimo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y^2-x} - x e^{y^2-x} = (1-x) e^{y^2-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy e^{y^2-x}$$

Quindi, la CN $\nabla f = 0$ si riduce a

$$\begin{cases} (1-x) e^{y^2-x} = 0 \\ 2xy e^{y^2-x} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x-1=0 \\ xy=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ unip.}$$

e l'unico punto che verifica la condizione necessaria è

$P(1,0)$

Se consideriamo la CS, abbiamo

$$f_{xx} = -e^{y^2-x} - (1-x)e^{y^2-x} = (x-2)e^{y^2-x}$$

$$f_{xy} = 2y(1-x)e^{y^2-x}$$

$$f_{yy} = 2xe^{y^2-x} + 4xy^2e^{y^2-x}$$

$$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} -e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{bmatrix}$$

La matrice è indefinita
e dunque il punto è
certamente di sella.

Concludiamo considerando il comportamento sul bordo. Osserviamo
che f è pari in y e il dominio è simmetrico rispetto
a $y=0$.

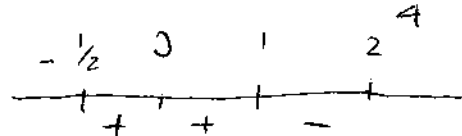
$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } \partial K &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2x - x^2 \} \\ &= \{ y^2 = 2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2 \} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f|_{\partial K} &= x e^{2x-x^2-x} & x \in [0,2] \\ &= x e^{x-x^2} = g(x) \end{aligned}$$

$$g'(x) = e^{x-x^2} + x(1-2x)e^{x-x^2} = (1+x-2x^2)e^{x-x^2}$$

$$g'(x) \geq 0 \quad 1+x-2x^2 \geq 0 \quad 2x^2-x-1 \leq 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} \nearrow -1/2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$


Quindi $x=1$ è punto di massimo per g , e punto di massimo assoluto per f in K

$$M = g(1) = f(1,1) = 1$$

$$\textcircled{3} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 - 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 6$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$(\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$$

Calcoliamo i corrispondenti autovettori

$$\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2\alpha - 2\beta &= 0 \\ \alpha &= \beta \end{aligned}$$

Poniamo $\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

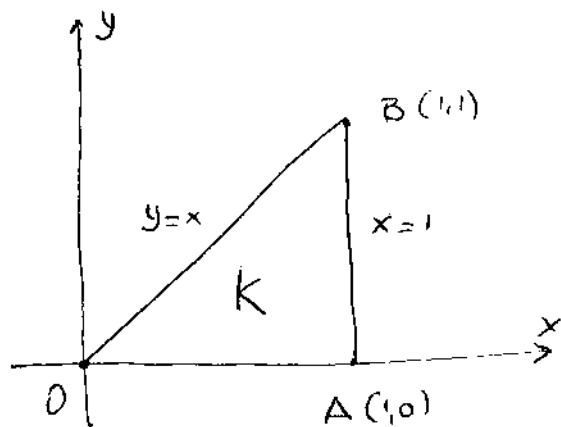
$$\underline{h}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 5\alpha + 2\beta &= 0 \\ \alpha &= -\frac{2}{5}\beta \end{aligned}$$

Poniamo $\underline{h}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Quindi, l'espressione dell'integrale generale del sistema è

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} e^{6x} & -2e^{-x} \\ e^{6x} & 5e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

④



$$z = x^2 + y^2$$

$$z_x = 2x$$

$$z_y = 2y$$

$$\int_{\Sigma} \frac{\ln(1+x+y)}{\sqrt{1+4z}} d\sigma_2 = \int_K \frac{\ln(1+x+y)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \int_K \frac{\ln(1+x+y)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy = \int_K \ln(1+x+y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \ln(1+x+y) dy = \int_0^1 \left[(1+x+y) \ln(1+x+y) \right]_0^x +$$

$$- \int_0^x \frac{1+x+y}{1+x+y} dy \Big] = \int_0^1 \left[(1+2x) \ln(1+2x) - (1+x) \ln(1+x) - x \right] dx$$

$$= \frac{(1+2x)^2}{4} \ln(1+2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1+2x}{4} dx - \frac{(1+x)^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1+x)}{2} dx - \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \ln 3 - \frac{(1+2x)^2}{16} \Big|_0^1 - 2 \ln 2 + \frac{(1+x)^2}{4} \Big|_0^1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{4} \ln 3 - \frac{9}{16} + \frac{1}{16} - 2 \ln 2 + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

⑤ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+3)^2 \ln n}$ Poniamo $x-3=t$ ed otteniamo

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n+3)^2 \ln n}$ Appliciamo il criterio del rapporto

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+4)^2 \ln(n+1)}}{\frac{1}{(n+3)^2 \ln n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+3)^2 \ln n}{(n+4)^2 \ln(n+1)} \right| = 1$$

Quindi $R=1$.

Inoltre per $t = \pm 1$, osserviamo che

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2 \ln n} < +\infty$. Perciò la serie converge puntualmente e assolutamente per $|t| \leq 1$.

Ripartendo il tutto in termini della variabile x , abbiamo

$$-1 \leq x-3 \leq 1$$

$$2 \leq x \leq 4$$

Quindi

$$I = J = [2, 4].$$

⑥ $\Gamma: \begin{cases} x=t \\ y=t^4 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} 36xy \, d\sigma_1 &= \int_0^1 36t \cdot t^4 \sqrt{1 + (4t^3)^2} \, dt = 36 \int_0^1 t^5 \sqrt{1 + 16t^6} \, dt \\ &= \left(\begin{array}{l} 1 + 16t^6 = s \\ 6t^5 dt = ds \end{array} \right) = 6 \int_1^{17} \sqrt{s} \, ds = \frac{2}{3} 6 \left[s^{3/2} \right]_1^{17} = 4 \left[\sqrt{17^3} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$(7) f = y^4 - 4y + e^{2x} + 2x - 1$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = 2e^{2x} + 2$$

$$f_y = 4y^3 - 4$$

$$f_y(0,0) = -4 \neq 0$$

$$f_x(0,0) = 4$$

Tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate e, dunque, l'equazione è univocamente risolubile rispetto a y .

Quando alla tangente, abbiamo

$$r_{t_g} : \begin{aligned} f_x(0,0)x + f_y(0,0)y &= 0 \\ 4x - 4y &= 0 \\ x - y &= 0. \end{aligned}$$

$$(8) \quad f = \begin{cases} \frac{9x^2y}{16x^2 + 16y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Presa una generica direzione $v = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos\vartheta, t \sin\vartheta) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9t^3 \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{16t^2 \cdot t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9}{16} \sin\vartheta \cos^2\vartheta \end{aligned}$$

Quindi, le derivate direzionali esistono qualunque sia la direzione. Osserviamo che se $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ è

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

Quindi, se f fosse differenziabile, il piano tangente sarebbe

$$\pi_{\text{tg}} : z = 0$$

Questo piano, tuttavia, non contiene tutte le derivate direzionali e, quindi, f non è differenziabile nell'origine.