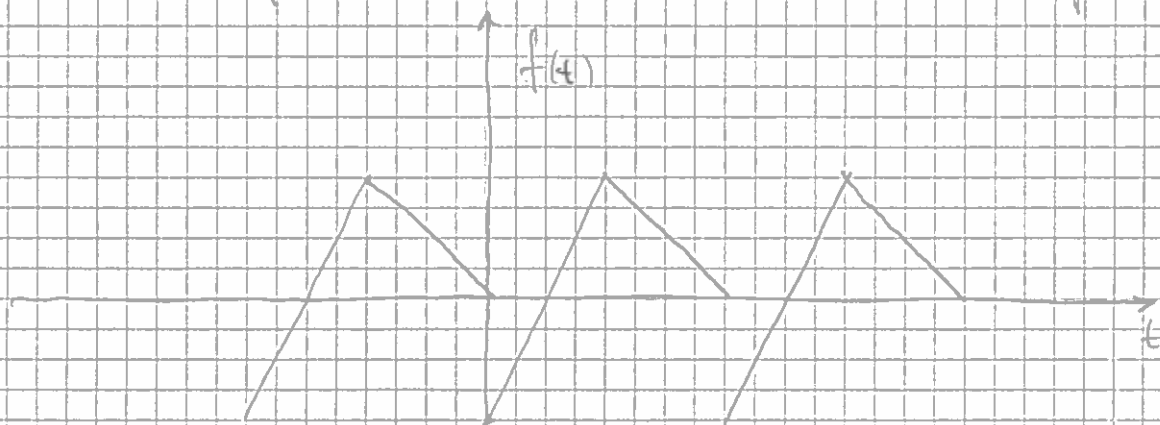


①  $f(t) = \begin{cases} -t, & \text{se } t \in (-\pi, 0) \\ -\pi + 2t, & \text{se } t \in [0, \pi] \end{cases}$   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $2\pi$ -periodica



Poiché

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\pi}^0 t^2 dt + \int_0^{\pi} (2t - \pi)^2 dt \\ &= \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{(2t - \pi)^3}{6} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi^3}{6} = \frac{2}{3} \pi^3 < +\infty \end{aligned}$$

la funzione è sviluppabile in serie di Fourier  
 Abbiamo

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 t dt + \int_0^{\pi} (2t - \pi) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-\pi}^0 + \left. \frac{(2t - \pi)^2}{4} \right|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} \right] = \pi/2 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -t \cos nt dt + \int_0^{\pi} (2t - \pi) \cos nt dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{t \sin nt}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\sin nt}{n} dt + \right. \\ \left. + (2t - \pi) \frac{\sin nt}{n} \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n} dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos nt}{n^2} \Big|_{-\pi}^0 + 2 \frac{\cos nt}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2} \right]$$

$$= \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -t \sin nt dt + \right. \\ \left. + \int_0^{\pi} (2t - \pi) \sin nt dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[ t \frac{\cos nt}{n} \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{\cos nt}{n} dt + \right. \\ \left. + (\pi - 2t) \frac{\cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \pi \frac{(-1)^n}{n} - \pi \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\pi}{n} \right] = -\frac{1}{n}$$

Lo sviluppo è, dunque

$$S(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nt - \frac{1}{n} \sin nt$$

La serie converge alla funzione nell' senso dell' energia. Venendo, invece, alla convergenza puntuale, abbiamo che

a)  $\forall t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ ,  $f$  è continua e derivabile unit  
e, dunque

$$S(t) = f(t)$$

b)  $\forall t_j = (2j+1)\pi$ ,  $f$  è continua in  $t_j$  e le derivate destre e sinistre sono finite, benché diverse. Perciò

$$S(t_j) = f(t_j)$$

c)  $\forall t_n = 2n\pi$ ,  $f$  ha in  $t_n$  un salto di ampiezza finita e le "pendenze" destra e sinistra sono finite. Quindi

$$S(t_n) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{-\pi + 0}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Infine in  $t=0$  abbiamo

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-)^n - 3}{\pi n^2}$$

$$-\frac{3\pi}{4} = -3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(2) Calcoliamo gli autovalori di  $A$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = -4$$

$$\lambda_1 = 2 + 2i$$

$$\lambda_2 = 2 - 2i$$

Calcoliamo  $h_1$ , l'autovettore corrispondente a  $\lambda_1$ . Abbiamo

$$(\lambda_1 I - A) h_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 5 \\ -1 & -1+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{-\alpha} - \alpha + (-1+2i)\beta = 0$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$h_2 = \begin{bmatrix} -1-2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sappiamo dalla teoria che due soluzioni linearmente indipendenti sono date da

$$w_1 = \operatorname{Re} \left( e^{\lambda_1 x} \underline{h}_1 \right)$$

$$w_2 = \operatorname{Im} \left( e^{\lambda_1 x} \underline{h}_1 \right)$$

Pertanto

$$e^{\lambda_1 x} \underline{h}_1 = e^{(2+2i)x} \begin{bmatrix} -1 + 2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2x} (\cos 2x + i \sin 2x) (-1 + 2i) \\ e^{2x} (\cos 2x + i \sin 2x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2x} (-\cos 2x - 2 \sin 2x + i(2 \cos 2x - \sin 2x)) \\ e^{2x} (\cos 2x + i \sin 2x) \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} e^{2x} (-\cos 2x - 2 \sin 2x) \\ e^{2x} \cos 2x \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_2 = \begin{bmatrix} e^{2x} (2 \cos 2x - \sin 2x) \\ e^{2x} \sin 2x \end{bmatrix}$$

e l'integrale generale è

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} e^{2x} (-\cos 2x - 2 \sin 2x) & e^{2x} (2 \cos 2x - \sin 2x) \\ e^{2x} \cos 2x & e^{2x} \sin 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 = 1 \\ C_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 3/2 \\ C_1 = 2 \end{cases}$$

③ Osserviamo che il vincolo si può parametrizzare, ossia

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Pertanto

$$f|_{\Gamma} = 8 \cos t + 15 \sin t + 6 \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si tratta di trovare massimo e minimo assoluti di  $g(t) = 8 \cos t + 15 \sin t + 6$  in  $[0, 2\pi]$

Osserviamo che

$$g'(t) = -8 \sin t + 15 \cos t$$

$$g'(t) = 0 \quad \tan t = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow \quad \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 t}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{225}{64}}} = \pm \frac{8}{17}$$

$$\sin t = \pm \frac{\tan t}{\sqrt{1 + \tan^2 t}} = \pm \frac{\frac{15}{8}}{\frac{17}{8}} = \pm \frac{15}{17}$$

Inoltre

$$g\left(\sin t = \frac{15}{17}, \cos t = \frac{8}{17}\right) = \frac{64}{17} + \frac{225}{17} + 6 = 17 + 6 = 23$$

$$g\left(\sin t = -\frac{15}{17}, \cos t = -\frac{8}{17}\right) = -\frac{64}{17} - \frac{225}{17} + 6 = -17 + 6 = -11$$

Pertanto

$$M = 23$$

$$m = -11$$

(4) Osserviamo che  $f = x^2 + y^2 + z^3 + 2xy e^{xyz}$  è di classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^3$

Inoltre

$$f(1,1,0) = 1 + 1 + 0 = 2 \neq 0$$

$$f_z = 3z^2 + 2xy e^{xyz} \quad f_z(1,1,0) = 0 \neq 0$$

Quindi tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate e l'equazione è univocamente risolubile rispetto a  $z$ .

Inoltre

$$f_x = 2x + 2y e^{xyz} + 2(xy)(yz) e^{xyz}$$

$$f_y = 2y + 2x e^{xyz} + 2(xy)(xz) e^{xyz}$$

$$f_x(1,1,0) = 0$$

$$f_y(1,1,0) = 0$$

Il piano tangente ha, dunque, equazione

~~$$f_x(1,1,0)(x-1) + f_y(1,1,0)(y-1) + f_z(1,1,0)z = 0$$~~

~~$$2z = 0$$~~

$$\pi_f : \quad z = 0$$