

SOLUZIONI

1

- ① Poiché la radice è una funzione crescente del suo argomento, è sufficiente cercare i punti di massimo e minimo nel quadrato di

$$g(x,y) = \operatorname{Sh}^2 x + \sin^2 y$$

$$\nabla g = 0 \quad \begin{cases} 2 \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x = 0 \\ 2 \sin y \cos y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{Sh} x = 0 \\ \sin 2y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo i punti $A(0, \frac{\pi}{2})$, $B(0, \pi)$, $C(0, \frac{3}{2}\pi)$
 Passiamo alle derivate seconde

$$H_g = \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Ch} 2x & 0 \\ 0 & 2 \cos 2y \end{bmatrix}$$

$$H_g(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrice indefinita,
 C punto di sella

$$H_g(B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrice definita positiva
 B punto di minimo
 relativo. $g(B) = 0$

$$H_g(C) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrice indefinita,
 C punto di sella

Studiamo, ora, il comportamento sul bordo. I quattro lati del quadrato sono dati da

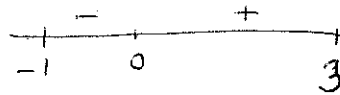
$$l_1: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 3; \quad l_2: \begin{cases} x=3 \\ y=t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 5$$

$$l_3: \begin{cases} x=t \\ y=5 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 3$$

$$l_4: \begin{cases} x=-1 \\ y=t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 5$$

$$g|_{l_1} = \operatorname{Sh}^2 t + \sin^2 1 = h_1(t)$$

$$h_1' = 2 \cosh t \sinh t$$

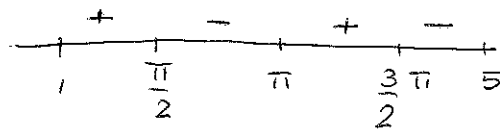


$$P_1(0,1) \text{ è punto di minimo} \quad g(0,1) = \sin^2 1$$

$$Q_1(3,1) \text{ è punto di massimo} \quad g(3,1) = \operatorname{Sh}^2 3 + \sin^2 1$$

$$g|_{l_2} = \operatorname{Sh}^2 3 + \sin^2 t = h_2(t)$$

$$h_2' = 2 \sin t \cos t$$



$$P_2(3, \frac{\pi}{2}) \quad P_2'(3, \frac{3\pi}{2}) \text{ sono punti di massimo}$$

$$g(3, \frac{3\pi}{2}) = g(3, \frac{\pi}{2}) = \operatorname{Sh}^2 3 + 1$$

$$Q_2(3, \pi) \text{ è punto di minimo} \quad g(3, \pi) = \operatorname{Sh}^2 3$$

$$g|_{l_3} = \operatorname{Sh}^2 t + \sin^2 5 = h_3(t)$$

$$h_3' = 2 \cosh t \sinh t$$



$$P_3(0,5) \text{ è punto di minimo} \quad g(0,5) = \sin^2 5$$

$$Q_3(3,5) \text{ è punto di massimo} \quad g(3,5) = \operatorname{Sh}^2 3 + \sin^2 5$$

$$g|_{l_4} = \operatorname{Sh}^2 1 + \sin^2 t = h_4(t)$$

$$h_4' = 2 \sin t \cos t$$

$$P_4(-1, \frac{\pi}{2}) \quad P_4'(-1, \frac{3\pi}{2}) \text{ sono punti di massimo}$$

$$g(-1, \frac{\pi}{2}) = g(-1, \frac{3\pi}{2}) = \operatorname{Sh}^2 1 + 1$$

$Q_4(-1, \pi)$ è punto di minimo $g(-1, \pi) = \text{Sh}^2 1$

(3)

Confrontando le quote è chiaro che per g (e per f) il punto di minimo assoluto è

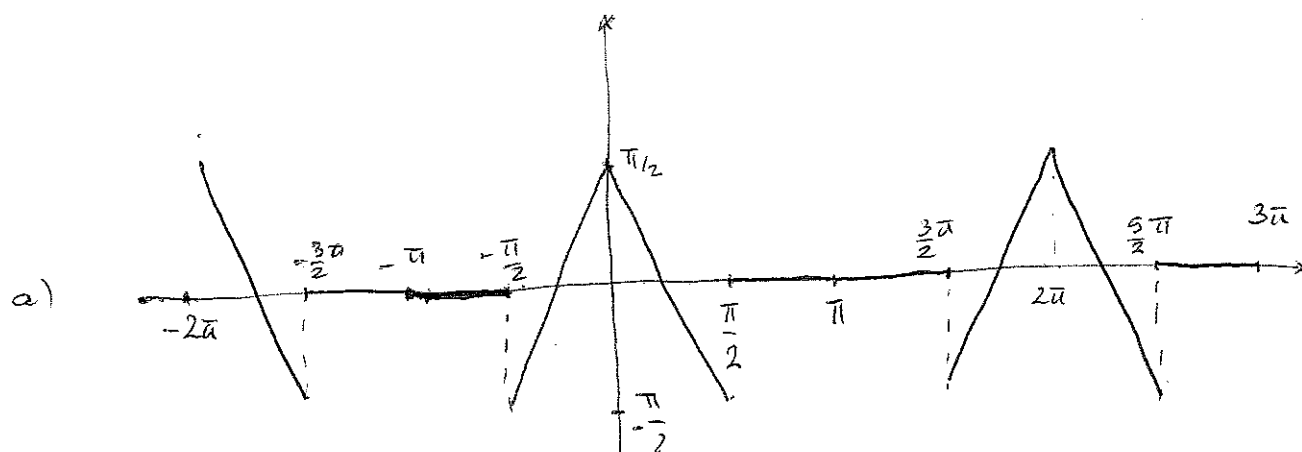
$$B(0, \pi) \Rightarrow m_g = 0 \quad m_f = 0$$

e i punti di massimo assoluto sono

$$P_2(3, \frac{\pi}{2}), \quad P_2'(3, \frac{3}{2}\pi) \Rightarrow M_g = \text{Sh}^2 3 + 1$$

$$M_f = \sqrt{\text{Sh}^2 3 + 1}$$

(2)



b) Facilmente si verifica che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$ e quindi f è sviluppabile in serie di Fourier

c) La funzione è pari, quindi $b_m = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} t - t^2 \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi/2} \\
 &\quad + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nt}{n} dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\sin n\pi/2}{n} - 2 \frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\sin n\pi/2}{n} - 2 \frac{\cos n\pi/2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \right]
 \end{aligned}$$

Quindi

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\sin n\pi/2}{n} - \frac{2 \cos n\pi/2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \right] \cos nt$$

d) La serie converge alla funzione nel senso dell'energia.
Inoltre

$$\forall t \neq 2k\pi$$

$$\forall t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\forall t_k = 2k\pi$$

$$\forall t_m = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

f è continua e derivabile in t e quindi $S(t) = f(t)$

f è continua in t_k e le derivate dx e sx sono finite e quindi $S(t_k) = f(t_k)$

f ha in t_m un salto finito e le pendenze dx e sx sono finite e quindi

$$\begin{aligned}
 S(t_m) &= \frac{f(t_m^+) + f(t_m^-)}{2} \\
 &= \frac{-\frac{\pi}{2} + 0}{2} = -\frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha &= 1 \\ \beta &= -1 \end{aligned}$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 5\gamma - \delta &= 0 \\ \gamma &= 1 \\ \delta &= 5 \end{aligned}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$Z(x) = \begin{bmatrix} e^{-4x} & e^{2x} \\ -e^{-4x} & 5e^{2x} \end{bmatrix} \quad W(x) = 6e^{-2x}$$

$$Z^{-1}(x) = \frac{e^{2x}}{6} \begin{bmatrix} 5e^{2x} & -e^{2x} \\ e^{-4x} & e^{-4x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}e^{4x} & -\frac{1}{6}e^{4x} \\ \frac{1}{6}e^{-2x} & \frac{1}{6}e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$y_p = Z(x) \int Z^{-1}(x) b(x) dx$$

$$= Z(x) \int \begin{bmatrix} \frac{5}{6}e^{4x} & -\frac{1}{6}e^{4x} \\ \frac{1}{6}e^{-2x} & \frac{1}{6}e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{5}e^{2x} \\ 0 \end{bmatrix} dx$$

(5)

(6)

$$= \mathcal{I}(x) \int \begin{bmatrix} e^{6x} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} dx$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-4x} & e^{2x} \\ -e^{-4x} & 5e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} e^{6x} \\ \frac{x}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} e^{+2x} + \frac{x}{5} e^{2x} \\ -\frac{1}{6} e^{2x} + x e^{2x} \end{bmatrix}$$

L'integrale generale è

$$y = \begin{bmatrix} e^{-4x} & e^{2x} \\ -e^{-4x} & 5e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\frac{x}{5} + \frac{1}{6}) e^{2x} \\ (x - \frac{1}{6}) e^{2x} \end{bmatrix}$$

Da qui, imponendo la C.I., abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{6} \\ 0 = -C_1 + 5C_2 - \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

④ $f(x, y, z) = z^4 + xz^3 - y^2 - 1$

f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$

Inoltre

$$f(0, 0, 1) = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$$

$$f_z = 4z^3 + 3xz^2 \quad f_z(0, 0, 1) = 4$$

Quindi f è univocamente risolubile rispetto a z .

Inoltre

$$f_x = z^3 \quad f_x(0, 0, 1) = 1$$

$$f_y = -2y \quad f_y(0, 0, 1) = 0$$

$$\pi_{f_y} : f_x(0, 0, 1)x + f_y(0, 0, 1)y + f_z(0, 0, 1)(z - 1) = 0$$

e concludiamo

⑦

π_{tg}

$$x + 4(z-1) = 0.$$