

①  $f = x^2 \sin y$ ,  $P(1,0)$   $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Utilizzando la definizione

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t\frac{1}{2}, 0+\sqrt{3}\frac{t}{2}) - f(1,0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{1}{2}t)^2 \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{1}{2}t)^2 \frac{\sqrt{3}t}{2}}{t} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

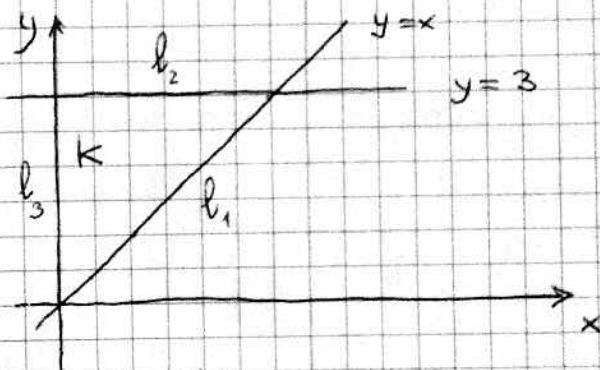
②  $f = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$f$  è di classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

trattandosi di un polinomio.

Cerchiamo massimi e mi-

nimi relativi liberi interni a  $K$ .



Abbiamo

CN

$$\begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

CS

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$P(1,1)$  è punto di minimo relativo.

Poiché  $P \in K$ ,  $f(1,1) = 0$ ,  $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in K$ ,  
concludiamo che  $P$  è il punto di minimo assoluto.

Valutiamo, ora, il comportamento sul bordo, a cui appartiene anche  $P$

$$\partial K = l_1 \cup l_2 \cup l_3$$

$$\begin{aligned} l_1: & y = x & 0 \leq x \leq 3 \\ l_2: & y = 3 & 0 \leq x \leq 3 \\ l_3: & x = 0 & 0 \leq y \leq 3 \end{aligned}$$

$$f|_{l_1} = 2(x-1)^2 = g_1(x)$$

$$g_1'(x) = 2(x-1) \quad g_1'(x) = 0 \text{ per } x=1, \quad g_1'(x) > 0 \text{ per } x > 1. \quad \text{Inoltre } g_1(0) = 2, \quad g_1(3) = 8$$

Quindi

$$m_1 = 0$$

$$M_1 = \max\{2, 8\} = 8$$

$$f|_{l_2} = (x-1)^2 + 4 = g_2(x)$$

La situazione è analoga a quella di prima, dunque

$$m_2 = g_2(1) = 4$$

$$M_2 = \max\{g_2(0), g_2(3)\} = \max\{5, 8\} = 8$$

$$f|_{l_3} = (y-1)^2 + 1 = g_3(y)$$

Come sopra, abbiamo

$$m_3 = g_3(1) = 1$$

$$M_3 = \max\{g_3(0), g_3(3)\} = \max\{2, 5\} = 5$$

Concludendo

$$m_{\text{ass}} = 0$$

$$M_{\text{ass}} = \max\{M_1, M_2, M_3\} = \max\{8, 8, 5\} = 8.$$

$$\textcircled{3} \quad z' = \Lambda z,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determiniamo autovalori ed autovettori della matrice  $A$

Abbiamo

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 - 1 = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} - \cancel{1} = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

$$(\lambda_1 I - A) \underline{h}_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A) \underline{h}_2 = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dunque, l'integrale generale è

$$z = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

dove  $C_1$  e  $C_2$  sono due costanti arbitrarie

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \sin 2x \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione omogenea

$$z'' + 4z' + 5z = 0 \quad \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 + 1 = 0 \quad \lambda = -2 \pm i$$

$$z = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + y_p$$



Utilizzando l'opportuna tabella, deve essere

$$y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$$

Imponiamo a  $y_p$  di risolvere l'equazione. Allora

$$y_p' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$y_p'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} & -4A \cos 2x - 4B \sin 2x \\ & + 8B \cos 2x - 8A \sin 2x \\ & + 5A \cos 2x + 5B \sin 2x = \sin 2x \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{cases} -4A + 8B + 5A = 0 \\ -8A - 4B + 5B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + 8B = 0 \\ -8A + B = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} A = -\frac{8}{65} \\ B = \frac{1}{65} \end{cases} \Rightarrow y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + \frac{8}{65} \cos 2x + \frac{1}{65} \sin 2x$$

$$\begin{aligned} y' &= -2C_1 e^{-2x} \cos x - C_1 e^{-2x} \sin x - 2C_2 e^{-2x} \sin x + \\ &+ C_2 e^{-2x} \cos x + \frac{16}{65} \sin 2x + \frac{2}{65} \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{8}{65} \\ -2C_1 + C_2 + \frac{2}{65} = 0 \end{cases} \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{8}{65}$$

$$C_2 = \frac{14}{65}$$

$$\boxed{y = \frac{8}{65} e^{-2x} \cos x + \frac{14}{65} e^{-2x} \sin x - \frac{8}{65} \cos 2x + \frac{1}{65} \sin 2x}$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + \sin(n+1)}{(n+3)^2} (x-3)^n$$

Poniamo  $(x-3)=t$  e ci riduciamo a  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\sin(n+1)}{(n+3)^2} t^n$

Applichiamo il criterio della radice per trovare il raggio di convergenza

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2+\sin(n+1)}{(n+3)^2} \right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln(2+\sin(n+1))}}{e^{\frac{2}{n} \ln(n+3)}} = 1$$

Perciò  $R = 1 \Rightarrow -1 < t < 1$

Calcoliamo il comportamento agli estremi della serie dei moduli, ossia di  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\sin(n+1)}{(n+3)^2} |t|^n$

Se  $t = \pm 1$  e  $|t|=1$  ed abbiamo  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\sin(n+1)}{(n+3)^2}$

Poiché  $\frac{2+\sin(n+1)}{(n+3)^2} \leq \frac{3}{(n+3)^2}$ , tale serie converge.

Quindi  $I = J$  ed è dato da

$$-1 \leq x-3 \leq 1$$

$$2 \leq x \leq 4$$

⑥  $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^3} d\sigma_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^9 t} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^9 t} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^9 t} 3 \sin t \cos t dt = \left[ \frac{3}{7 \cos^7 t} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{3}{7} [(\sqrt{2})^7 - 1]$$

$$(7) \quad x^2 \cos y + y^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$f_x = 2x \cos y - \frac{\pi}{2} y^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f_y = -x^2 \sin y + 2y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \neq 0$$

$$f_y\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -1 \neq 0$$

Poiché tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate, concludiamo che  $f(x, y) = 0$  è univocamente risolubile rispetto ad entrambe le variabili. Se consideriamo  $y = g(x)$  con  $g: I_{x=1} \rightarrow J_{y=\frac{\pi}{2}}$  abbiamo

$$g'(1) = - \frac{f_x(1, \pi/2)}{f_y(1, \pi/2)} = - \frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{-1} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3$$

Per il grafico qualitativo, occorre la derivata seconda.

Abbiamo  $\forall x \in I_{x=1}$

$$x^2 \cos g(x) + [g(x)]^2 \cos \frac{\pi}{2}x \equiv 0$$

$$2x \cos g - x^2 \sin g g' + 2g g' \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} g^2 \sin \frac{\pi}{2}x \equiv 0$$

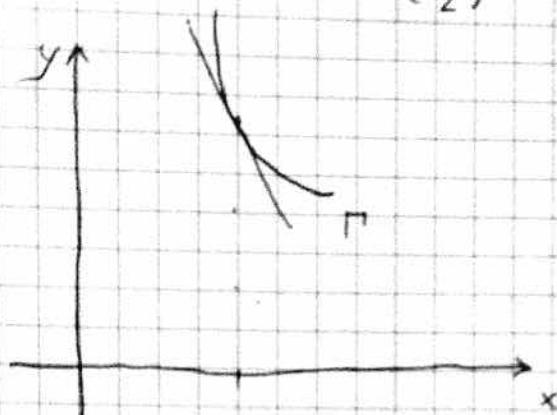
$$\begin{aligned} & 2 \cos g - 2x \sin g g' - 2x \sin g g' - x^2 \cos g [g']^2 \\ & + 2[g']^2 \cos \frac{\pi}{2}x - x^2 \sin g g'' + 2g g'' \cos \frac{\pi}{2}x + \\ & + 2g g' \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x - 2 \frac{\pi}{2} g g' \sin \frac{\pi}{2}x - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 g^2 \cos \frac{\pi}{2}x \equiv 0 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori precedenti:

$$\begin{aligned} & -2 \sin \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 - 2 \sin \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 - \sin \frac{\pi}{2} g''(1) \\ & - 2 \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0 \end{aligned}$$

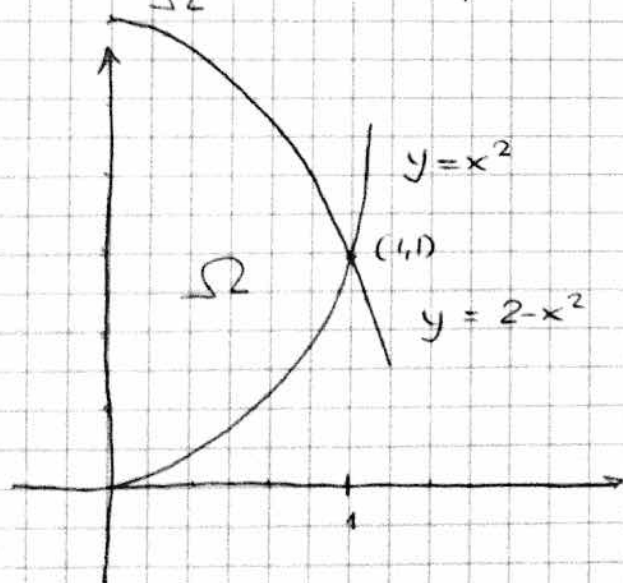
$$4\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - g''(1) + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0 \Rightarrow g''(1) > 0$$

Dunque



$$(8) \int_{\Sigma} \frac{xy}{\sqrt{1+4z}} d\sigma = \int_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \int_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy = \int_{\Omega} xy dx dy$$



$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} xy dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x [y^2]_{x^2}^{2-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x [4 - \cancel{x^4} - 4x^2 - \cancel{x^4}] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 4x - 4x^3 dx = \frac{1}{2} [2x^2 - x^4]_0^1 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$