$f = 4x^2 + 9y^2$

$\Gamma: \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi$

$f\big|_\Gamma = 16\cos^2 t + 81 \sin^2 t = 16 \frac{1+\cos 2t}{2} + 81 \frac{1-\cos 2t}{2}$

$= \frac{97}{2} - \frac{65}{2}\cos 2t$

$M = \frac{97+65}{2} = 81 \qquad \cos 2t = -1 \qquad t_1 = \frac{\pi}{2} \qquad t_2 = \frac{3}{2}\pi$

$m = \frac{97-65}{2} = 16 \qquad \cos 2t = 1 \qquad t_3 = 0 = 2\pi \quad t_4 = \pi$

$P_1 = (0,3) \qquad P_2\,(0,-3) \qquad P_3\,(2,0) \qquad P_4\,(-2,0)$

Con i moltiplicatori di Lagrange

$\mathcal{L} = 4x^2 + 9y^2 + \lambda\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right]$

$\mathcal{L}_x = 8x + \lambda \frac{x}{2} = 0$

$\mathcal{L}_y = 18y + \frac{2}{9}\lambda y = 0$

$\mathcal{L}_\lambda = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$

Le soluzioni sono

$A\,(0, 3, -81)$

$B\,(0, -3, -81)$

$C\,(2, 0, -16)$

$D\,(-2, 0, -16)$

Non serve applicare le C.S., perché Γ è un compatto. Basta quindi sostituire in f e determinare i valori massimo e minimo

---

$\cos xy - (1-y^2)x^2 + y = 0 \qquad P\,(1,0)$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \qquad f(1,0) = \cos 0 - 1 = 0$

$f_y = -x \sin xy + 2x^2 y \qquad f_y(1,0) = 1$

$f_x = -y \sin xy - 2x(1-y^2) \qquad f_x(1,0) = -2$

$g'(1) = -\frac{f_x(1,0)}{f_y(1,0)} = 2$

Calcoliamo g'' e ripartiamo dall'equazione

$$\cos xg - (1-g^2)\,x^2 + g \equiv 0$$

$$-\sin xg\,(g+xg') - 2x(1-g^2) + 2x^2 gg' + g' \equiv 0$$

Sostituendo si ritrova $g'(1) = 2$

Passiamo alla derivata seconda

$$-\cos xg\,(g+xg')^2 - \sin xg\,(2g'+xg'') - 2(1-g^2)$$
$$-2x(-2gg') + 4xgg' + 2x^2 g'^2 + 2x^2 gg'' + g'' \equiv 0$$

Sostituendo

$$-2^2 - 2 + 2\cdot 2^2 + g'' = 0 \qquad g'' = -2$$

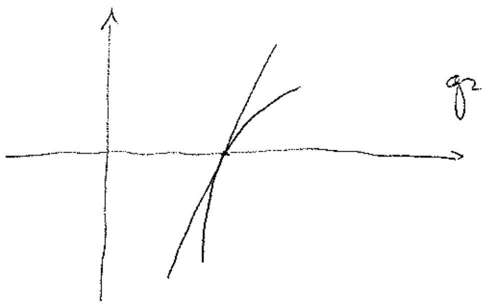
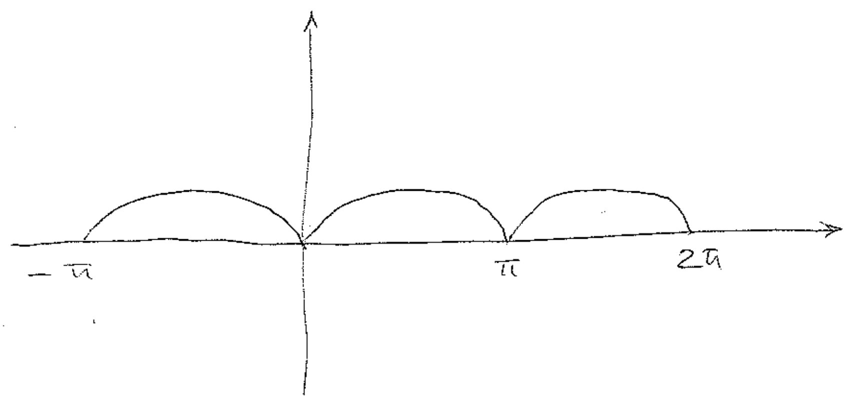


grafico qualitativo.



f è continua in $\mathbb{R}$. Quindi sicuramente $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$

e quindi è sviluppabile in serie di Fourier.

Inoltre, poichè f è pari, sarà

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\, dt = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{\pi} \sin^2 t \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos nt\, dt$$

$$\int_0^{\pi} \sin t \cos nt\, dt = (-)^n + 1 + n^2 \int_0^{\pi} \sin t \cos nt\, dt$$

Quindi

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \frac{(-)^n + 1}{n^2 - 1} \qquad n \geq 2$$

$$S(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-)^n + 1}{n^2 - 1} \cos nt$$

In ogni punto f è continua e derivabile, oppure continua, con derivate dx e sx finite. Possiamo perciò concludere che

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad S(t) = f(t)$$

In particolare, per $t = 0$

$$S(0) = f(0)$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-)^n + 1}{n^2 - 1} = 0$$

Se $n = 2k+1$ $\quad \dfrac{(-)^n + 1}{n^2 - 1} = 0$

Se $n = 2k$ $\quad \dfrac{(-)^n + 1}{n^2 - 1} = \dfrac{2}{4k^2 - 1}$

Perciò otteniamo

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Phi = \int_0^2 e^{y+y'}$$

$$F = e^{y+y'} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^{y+y'} \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = e^{y+y'}$$

$$e^{y+y'} - \frac{d}{dx} e^{y+y'} = 0$$

$$e^{y+y'} - (y'+y'') e^{y+y'} = 0$$

$$y'' + y' = 1$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x$$

$$y(0) = 1 \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + e^{-2} C_2 + 2 = 2 \end{cases}$$

$$y(2) = 2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + e^{-2} C_2 = 0 \end{cases} \qquad C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^{-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-2} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-2}}{e^{-2}-1}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-2} \end{vmatrix}} = \frac{-1}{e^{-2}-1}.$$