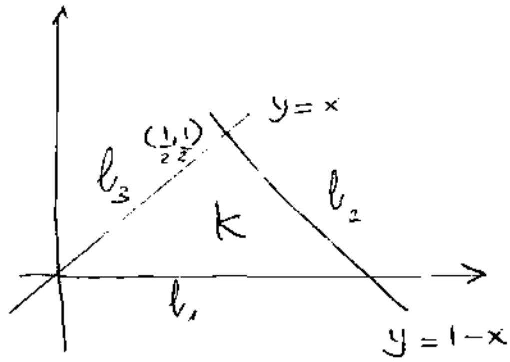
① $f = y\left[x^2 + \ln(1+x+y)\right]$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{y}{1+x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \ln(1+x+y) + \frac{y}{1+x+y}$$

Poichè K è contenuto nel primo quadrante, l'unico punto che annulla il gradiente è O, che appartiene a ∂K. Passiamo, quindi, a studiare il comportamento sul bordo

ℓ_1: $y=0$ $\quad x\in[0,1]$ $\quad f|_{\ell_1} = 0$

ℓ_2: $y = 1-x$ $\quad x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ $\quad f|_{\ell_2} = (1-x)\left[x^2+\ln 2\right] = g(x)$

$$g'(x) = -x^2 - \ln 2 + 2x(1-x) = -3x^2 + 2x - \ln 2$$

$$= -(3x^2 - 2x + \ln 2).$$

Poichè $g'(x) < 0 \quad \forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, g è decrescente e quindi $M_2 = g\left(\frac{1}{2}\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \ln 2\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln 2 \qquad m_2 = g(1) = 0.$

ℓ_3: $y = x$ $\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ $\quad f|_{\ell_3} = x\left[x^2 + \ln(1+2x)\right] = h(x)$

$$h'(x) = x^2 + \ln(1+2x) + x\left(2x + \frac{2}{1+2x}\right)$$

Poichè $h'(x) \geq 0 \quad \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, h è crescente e quindi $m_3 = h(0) = 0$

$M_3 = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + \ln 2\right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln 2$

Perciò

$$M_{ass} = \max\left\{0, \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln 2\right\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$m_{ass} = \min\{0, 0, 0\} = 0.$$

---

② $f(x,y,z) = \sin(x+y+z) + e^{x+y+z} - 1$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$f_z = \cos(x+y+z) + e^{x+y+z}$

$f(0,0,0) = \sin 0 + e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f_z(0,0,0) = 1 + 1 = 2$

Poichè tutte le ipotesi sono verificate, possiamo applicare il Teo di Dini e concludere che $f=0$ definisce $g: I_r(0,0) \longrightarrow J_{r'}(0)$ t.c. $g \in C^\infty(I_r(0,0))$ e $\forall (x,y) \in I_r(0,0)$ $f(x,y,g(x,y)) \equiv 0$.

Partiamo da

$$\sin(x+y+g(x,y)) + e^{x+y+g(x,y)} - 1 \equiv 0$$

e calcoliamo le derivate prime e seconde

$$\cos(x+y+g)(1+g_x) + e^{x+y+g}(1+g_x) \equiv 0$$

$$\cos(x+y+g)(1+g_y) + e^{x+y+g}(1+g_y) \equiv 0$$

Sostituendo abbiamo

$$1+g_x(0,0) + 1 + g_x(0,0) = 0 \implies g_x = -1$$

$$1+g_y(0,0) + 1 + g_y(0,0) = 0 \implies g_y = -1$$

Derivando un'altra volta

$$-\sin(x+y+g)(1+g_x)^2 + \cos(x+y+g)g_{xx} + e^{x+y+g}(1+g_x)^2 + e^{x+y+g} \cdot g_{xx} \equiv 0$$

$$-\sin(x+y+g)(1+g_y)^2 + \cos(x+y+g)g_{yy} + e^{x+y+g}(1+g_y)^2 + e^{x+y+g} \cdot g_{yy} \equiv 0$$

$$-\sin(x+y+g)(1+g_y)(1+g_x) + \cos(x+y+g)g_{xy} + e^{x+y+g}(1+g_y)(1+g_x) + e^{x+y+g}g_{xy} \equiv 0$$

Sostituendo

$$g_{xx}(0,0) + g_{xx}(0,0) = 0$$
$$g_{yy}(0,0) + g_{yy}(0,0) = 0$$
$$g_{xy}(0,0) + g_{xy}(0,0) = 0$$

da cui

$$g_{xx}(0,0) = g_{yy}(0,0) = g_{xy}(0,0).$$

Il polinomio di Mc-Laurin risulta dunque

$$P_2(x,y) = g(0,0) + g_x(0,0)x + g_y(0,0)y + \\ + \frac{1}{2}\left[g_{xx}(0,0)x^2 + 2g_{xy}(0,0)xy + g_{yy}(0,0)y^2\right] \\ = -x-y$$

---

③ Calcoliamo gli autovalori della matrice A.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 2 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} &(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2) = 0 \\ &(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \\ &\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 2 \end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale avrà l'espressione

$$\underline{z} = e^x \underline{c}_1 + xe^x \underline{c}_2 + e^{2x}\underline{c}_3$$

dove $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$, $\underline{c}_3$ sono tre vettori complessivamente dipendenti da 3 costanti arbitrarie

Per ricavare $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ deriviamo $\underline{z}$ ed imponiamo che risolva il sistema dato. Abbiamo

$$\underline{z}' = e^x\underline{c}_1 + (xe^x + e^x)\underline{c}_2 + 2e^{2x}\underline{c}_3$$

$$e^x\underline{c}_1 + (xe^x+e^x)\underline{c}_2 + 2e^{2x}\underline{c}_3 = e^x A \underline{c}_1 + xe^x A\underline{c}_2 \\ + e^{2x} A \underline{c}_3$$

e quindi

$$\begin{cases} \mathbb{A}\,\underline{c}_3 = 2\,\underline{c}_3 \\ \mathbb{A}\,\underline{c}_2 = \underline{c}_2 \\ \mathbb{A}\,\underline{c}_1 = \underline{c}_1 + \underline{c}_2 \end{cases}$$

Cominciamo da $\underline{c}_3$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -2\gamma = 2\alpha \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = 2\beta \\ \alpha + 3\gamma = 2\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha = L \\ \beta = L \\ \gamma = -L \end{matrix} \Rightarrow \underline{c}_3 = \begin{bmatrix} L \\ L \\ -L \end{bmatrix}$$

Passiamo a $\underline{c}_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -2\gamma = \alpha \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = \beta \\ \alpha + 3\gamma = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \\ a + 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -2M \\ \beta = N \\ \gamma = M \end{cases} \Longrightarrow \underline{c}_2 = \begin{bmatrix} -2M \\ N \\ M \end{bmatrix}$$

Infine per $\underline{c}_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2M \\ N \\ M \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\gamma = \alpha - 2M \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = \beta + N \\ \alpha + 3\gamma = \gamma + M \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 2M \\ \alpha + 2\gamma = -N \\ \alpha + \gamma = M \end{cases}$$

Tutto è coerente solo assumendo $M = N = 0$, da cui otteniamo

$$\underline{c}_2 = \underline{0} \qquad e \qquad \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 2H \\ K \\ -H \end{bmatrix}$$

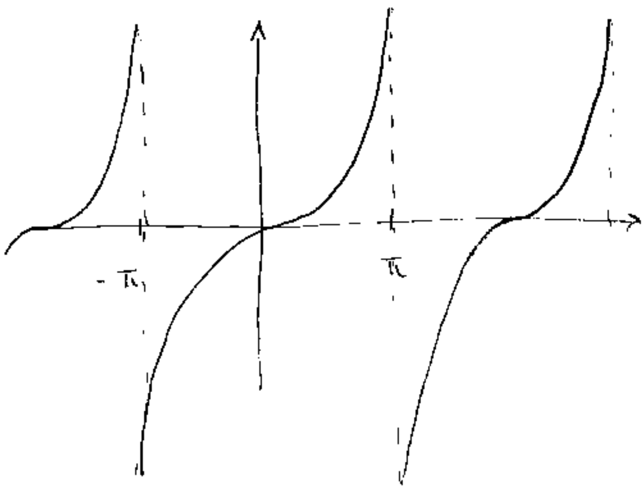
Perciò

$$\underline{Z} = e^x \begin{bmatrix} 2H \\ k \\ -H \end{bmatrix} + e^{2x} \begin{bmatrix} L \\ L \\ -L \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^x & 0 & e^{2x} \\ 0 & e^x & e^{2x} \\ -e^x & 0 & -e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix}$$

---

(4)



Poiché f è limitata e presenta discontinuità solo nei punti del tipo $t_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ è chiaro che f è sviluppabile in serie di Fourier.

Inoltre, essendo f dispari, $a_0 = a_n = 0$ e

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^3 \sin nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-t^3 \frac{\cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} t^2 \frac{\cos nt}{n} dt \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\pi^3 \frac{\cos n\pi}{n} + 3t^2 \frac{\sin nt}{n^2} \Big|_0^{\pi} - 6\int_0^{\pi} t \frac{\sin nt}{n^2} dt \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\pi^3 \frac{\cos n\pi}{n} + 6\frac{\cos nt}{n^3} \cdot t \Big|_0^{\pi} - 6\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n^3} dt \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\pi^3 \frac{(-)^n}{n} + 6\frac{\cos n\pi}{n^3}\pi \right] = \frac{2}{\pi}\left[\pi^3 \frac{(-)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi(-)^n}{n^3} \right]$$

$$= \frac{2(-)^n}{n}\left[-\pi^2 + \frac{6}{n^2} \right]$$

Quindi

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-)^n}{n}\left[\frac{6}{n^2} - \pi^2 \right] \sin nt$$

Per quanto riguarda la convergenza

a) $\forall\, t \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, f è continua e derivabile. Pertanto $S(t) = f(t)$

b) $\forall\, t_k = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, f ha un salto di ampiezza finita e $f'_+(t_k),\ f'_-(t_k)$ sono entrambe finite. Perciò

$$S(t_k) = \frac{f(t_k^+) + f(t_k^-)}{2} = \frac{\pi^3 - \pi^3}{2} = 0.$$

Infine

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-)^n}{n}\left[\frac{6}{n^2} - \pi^2 \right] \sin n\frac{\pi}{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-)^{2k+1}}{2k+1}\left(\frac{6}{(2k+1)^2} - \pi^2 \right) \sin (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= -2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{2k+1}\left(\frac{6}{(2k+1)^2} - \pi^2 \right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

per quanto ottenuto sopra studiando la convergenza puntuale