1. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9xy}{\sqrt{16x^2+16y^2}} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

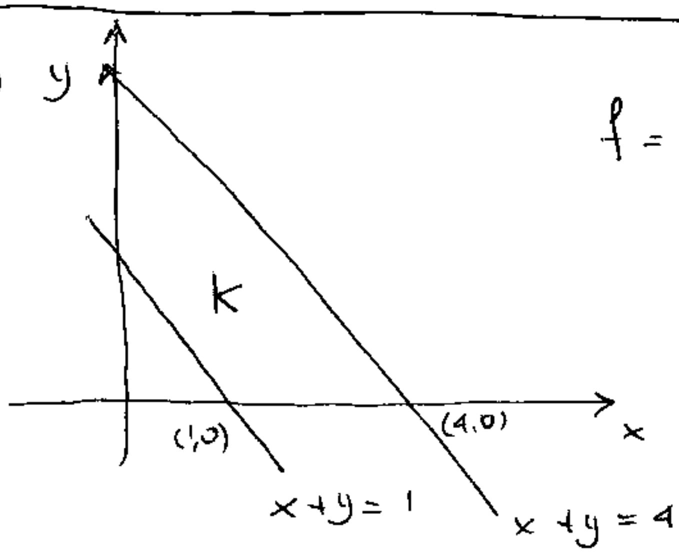
$\forall\ \underline{v}=(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$, costruiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\frac{1}{t}\,\frac{9t^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{16t^2\cos^2\theta+16t^2\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{9t\sin\theta\cos\theta}{4|t|}$$

Il limite per $t\to 0$ di tale quantità non esiste, e quindi le derivate direzionali in generale non esistono (fanno eccezione $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\pi$, $\theta=\frac{3}{2}\pi$, $\theta=2\pi$).
Conseguentemente, concludiamo che f <u>non</u> è differenziabile

---

2. 

$$f=xy\ln(x+y)$$

$$\begin{cases}f_x=0\\ f_y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}=0\\ x\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y\ln(x+y)=x\ln(x+y)\\ y\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y)\ln(x+y)=0 \\ y\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}=0 \end{cases} \Longrightarrow ① \begin{cases} x=y \\ x\ln 2x+\dfrac{x^2}{2x}=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$② \begin{cases} x+y=1 \\ x(1-x)=0 \end{cases}$$

Da ① ricaviamo

$$\begin{cases} y=x \\ x\left(\ln 2x+\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \notin K$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}e^{-1/2} \\ x=\frac{1}{2}e^{-1/2} \end{cases} \notin K$$

Da ② ricaviamo

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \in \partial K \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \in \partial K ;$$

non ci sono, dunque, punti interni a K che verificano la CN. Studiamo il comportamento sul bordo

$$l_1 : \begin{cases} y=0 \\ x\in[1,4] \end{cases} \qquad f|_{l_1}=0 \qquad m_1=M_1=0$$

$$l_2 : \begin{cases} x+y=4 \\ x\in[0,4] \end{cases} \qquad f|_{l_2}=x(4-x)\ln 4 \qquad \begin{matrix} m_2=0 \\ M_2=4\ln 4 \end{matrix}$$

$$l_3 : \begin{cases} x=0 \\ y\in[1,4] \end{cases} \qquad f|_{l_3}=0 \qquad m_3=M_3=0$$

$$l_4 : \begin{cases} x+y=1 \\ x\in[0,1] \end{cases} \qquad f|_{l_4}=0 \qquad m_4=M_4=0$$

Quindi

$$m = 0$$
$$M = 4 \ln 4$$

---

(3) $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A}) = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 9 = 0$ $\qquad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$ $\qquad \lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = -1$

Conseguentemente per $\lambda_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha - \beta = 0 \qquad h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha + \beta = 0 \qquad h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'integrale generale risulta

$$\underline{z} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x} = \begin{bmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ e^{5x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

---

(4) La forma ω è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$, che è ovviamente un aperto semplicemente connesso. E' dunque sufficiente verificare che ω sia chiusa in $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4(\alpha - 6) y^3 e^{-3x} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -3 \cdot 4 y^3 e^{-3x}$$

Dunque, richiediamo che

$$\cancel{4}(\alpha-6) = -3\cdot\cancel{4}$$

$$\alpha = 6-3 \qquad \alpha = 3$$

La forma esatta è, dunque,

$$\omega = -3y^4 e^{-3x}\,dx + \left(4y^3 e^{-3x} + 3\cos 5y\right)dy$$

Il potenziale sarà, scegliendo $(x_0, y_0) = (0,0)$,

$$U(x,y) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y \left(4t^3 e^{-3x} + 3\cos 5t\right)dt$$

$$= \left[t^4 e^{-3x} + \frac{3}{5}\sin 5t\right]_0^y = y^4 e^{-3x} + \frac{3}{5}\sin 5y$$

In generale avremo

$$U = y^4 e^{-3x} + \frac{3}{5}\sin 5y + C$$

con C costante arbitraria

---

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{18^n x^{2n+5}}{(n+1)(2n+5)} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{18^n (x^2)^n}{(n+1)(2n+5)}$$

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{18^{n+1}}{(n+2)(2n+7)} \frac{(n+1)(2n+5)}{18^n} = 18.$$

Quindi $R = \frac{1}{18}$ e la serie converge in

$$|x^2| < \frac{1}{18} \implies -\sqrt{\frac{1}{18}} < x < \sqrt{\frac{1}{18}}$$

Inoltre è immediato verificare che la serie converge semplicemente ed assolutamente anche negli estremi.

Dunque $I = \left[-\sqrt{\frac{1}{18}}, \sqrt{\frac{1}{18}} \right]$

All'interno di I possiamo derivare membro a membro e concludere che

$\forall x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{18}}, \sqrt{\frac{1}{18}} \right)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \, 18^n \frac{x^{2n+4}}{n+1}$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \, 18^n \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}$$

Poniamo $x^2 = t$ e consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \, 18^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{18} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(18t)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{18} \ln(1 + 18t)$$

Dunque

$$f'(x) = \frac{x^2}{18} \ln(1 + 18x^2)$$

---

⑥ $$\int_{\Gamma} 96 \, xy \, d\sigma_1 = \int_0^1 96 \, t^5 \sqrt{(4t^3)^2 + 1} \, dt$$

$$= \int_0^1 96 \, t^5 \sqrt{1 + 16t^6} \, dt$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 16t^6 = s \\ 96t^5 dt = ds \end{pmatrix} = \int_1^{17} \sqrt{s} \, ds = \left[\frac{2}{3} s^{3/2} \right]_1^{17}$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sqrt{17^3} - 1 \right]$$

(7) Posto $f = x^4 - 4x + e^{2y} + 2y^2 - 1$, è evidente che f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$.

Inoltre $$f_y = 2e^{2y} + 4y$$

$$f(0,0) = 0, \qquad f_y(0,0) = 2 \neq 0$$

Posso dunque applicare il Teo di Dini e concludere che $f=0$ è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno dell'origine.

Infine
$$f_x = 4x^3 - 4 \qquad f_x(0,0) = -4$$

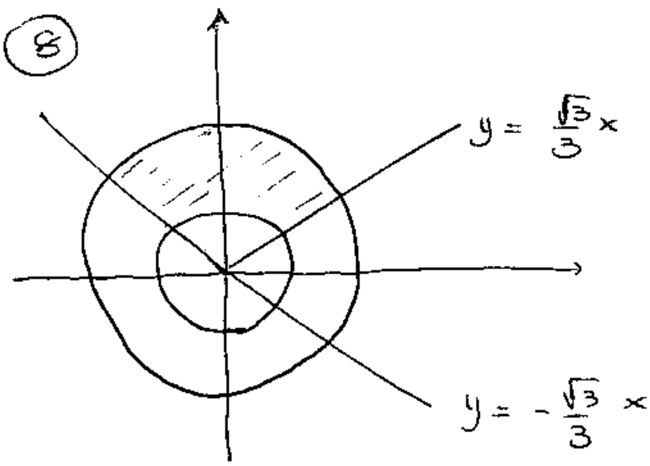
e la retta tangente ha equazione

$$-4x + 2y = 0 \qquad y = \frac{4x}{2}$$

$$y = 2x$$

---

(8)



È chiaro che per motivi di simmetria, sarà

$$x_G = 0$$

Quanto a y_G, abbiamo

$$y_G = \frac{\int_D y \, dx\, dy}{\int_D dx\, dy} = \frac{\int_{\pi/6}^{\frac{5}{6}\pi} \int_1^2 \rho \sin\vartheta \, \rho \, d\rho\, d\vartheta}{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \int_1^2 \rho \, d\rho\, d\vartheta}$$

$$= \frac{\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin\theta \, d\theta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2}{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} d\theta \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2} = \frac{\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{8-1}{3}}{\frac{4}{6}\pi \quad \frac{4-1}{2}} =$$

$$= \frac{\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{7}{3}}{\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{3}} \quad \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}} = \frac{7}{3}\frac{\sqrt{3}}{\pi}.$$