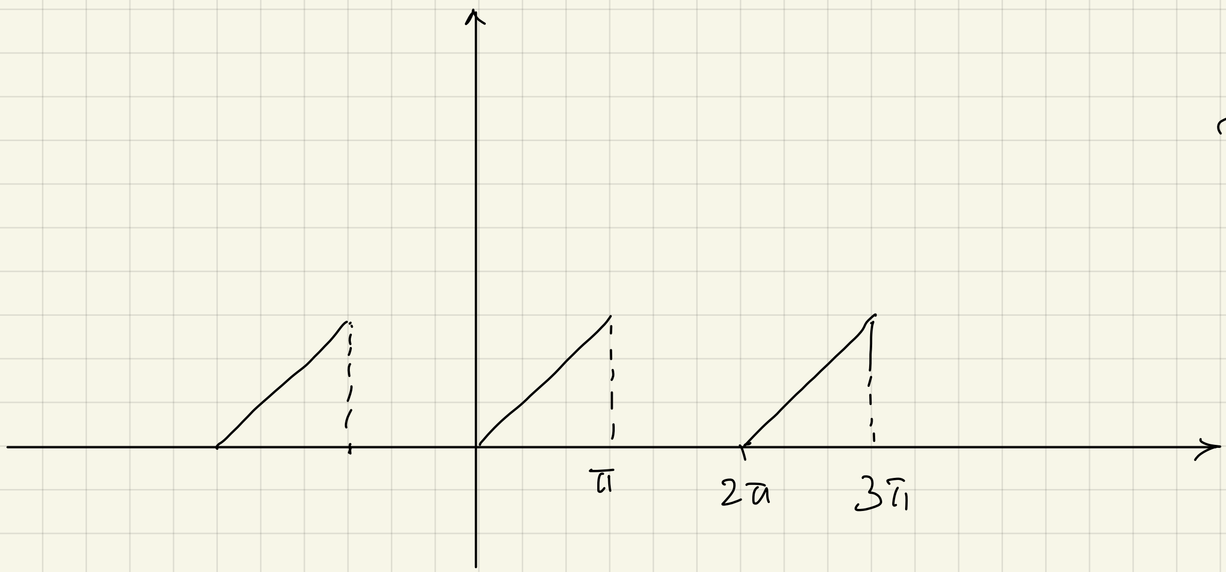
① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi$ - periodica, $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ t & t \in (0, \pi) \end{cases}$




Poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt =$$

$$= \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^3}{3} < +\infty$$

è chiaro che $f$ è sviluppabile in serie di Fourier.

Abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2} \implies \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[ \cancel{t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi}} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nt\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi n^2} \cos nt \Big|_0^{\pi} = \frac{(-)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t \sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[ -t\,\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^{\pi} + \cancel{\frac{1}{n}\int_0^{\pi}} \cos nt\,dt \right]$$

$$= -\frac{(-)^n}{n} = \frac{(-)^{n+1}}{n}$$

Pertanto

$$S(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{\pi n^2} \cos nt + \frac{(-)^{n+1}}{n} \sin nt$$

Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie converge alla funzione nel senso dell'energia.

Inoltre

$\forall\, t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f$ è continua e derivabile in $t$ e quindi, la serie converge in $t$ al valore della funzione nel punto.

$\forall\, t_n = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $f$ è continua e le derivate destra e sinistra sono diverse ma finite. Pertanto la serie converge in $t_n$ a $f(t_n)$, ossia $S(t_n) = 0$.

Infine, $\forall\, t_h = (2h+1)\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, $f$ ha un salto di ampiezza finita e risulta

$$S((2h+1)\pi) = \frac{f((2h+1)\pi^+) + f((2h+1)\pi^-)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Non c'é convergenza uniforme della serie alla funzione in $\mathbb{R}$.

Se scegliamo $t=0$, dai risultati precedenti otteniamo

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$-\frac{\pi}{4} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Infine, dall'identità di Parseval abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right]$$

$$\frac{\pi^3}{3} = \pi\left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-)^k-1}{\pi k^2}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\right]$$

$$\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{8}\right)\frac{1}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{5}{24}\pi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

---

(2) $$\begin{cases} z' = \mathbb{A} z \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Cerchiamo gli autovalori di $\mathbb{A}$. Abbiamo

$$\det(\lambda I - \mathbb{A}) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 0 & \lambda - 6 & 2 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = 0 \qquad \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 5.$$

Cerchiamo i corrispondenti autovettori. Abbiamo

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -\beta + 2\gamma = 0 \\ -6\beta + 2\gamma = 0 \\ -\beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \cancel{-2\beta + 2\gamma = 0} \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad h_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 5\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \\ \cancel{-\beta + 2\gamma = 0} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi, l'integrale generale risulta

$$\underset{\sim}{z} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4}e^{4x} & 0 \\ 0 & e^{4x} & 2e^{5x} \\ 0 & e^{4x} & e^{5x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{4}c_2 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 3 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} c_1 = -1/4 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 2 \end{array}$$

Quindi, l'integrale particolare cercato è

$$\underset{\sim}{z} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4}e^{4x} & 0 \\ 0 & e^{4x} & 2e^{5x} \\ 0 & e^{4x} & e^{5x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

③ $y' = \frac{1}{y}\sqrt{y^2-1}$

In questo caso $f(x,y) = \frac{1}{y}\sqrt{y^2-1}$

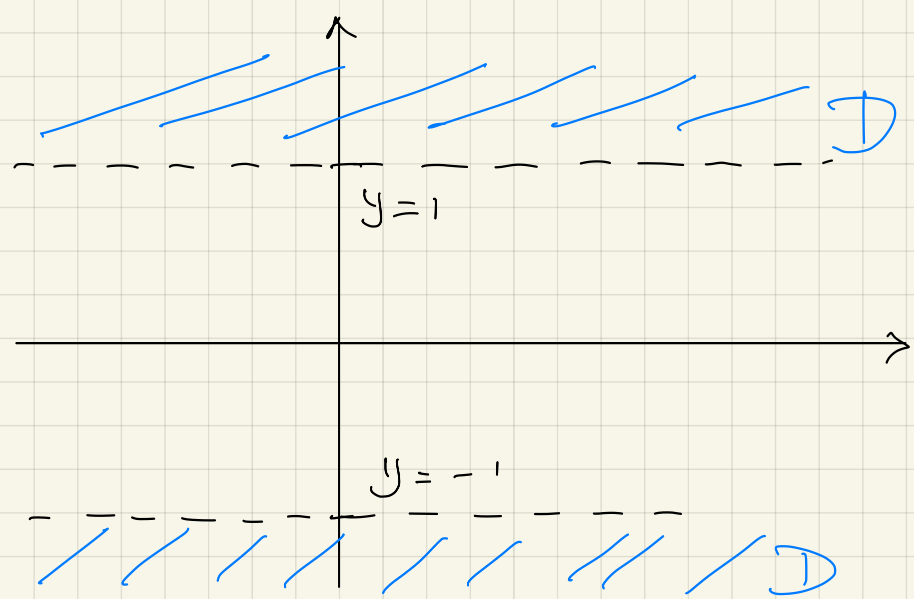
Per applicare il Teorema di esistenza ed unicità in piccolo, è necessario determinare l'aperto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui $f$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue.

È chiaro che deve essere

$$y^2 - 1 > 0 \implies y < -1 \text{ oppure } y > 1$$

$$y \neq 0$$

L'aperto è rappresentato in figura



Osserviamo che la condizione iniziale $y(0)=1$ è posta sulla frontiera di D, quindi non possiamo garantire che la soluzione sia unica.

Banalmente si osserva che la retta $y=1$ è soluzione del Pb di Cauchy assegnato.

Inoltre, separando le variabili, abbiamo

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\, dy = \int dx$$

$$\sqrt{y^2-1} = x + C$$

$$y = \sqrt{(x+C)^2+1}$$

[Scegliamo direttamente la radice positiva, poichè $y(0)=1>0$]

Imponendo la condizione iniziale, troviamo $C = 0$

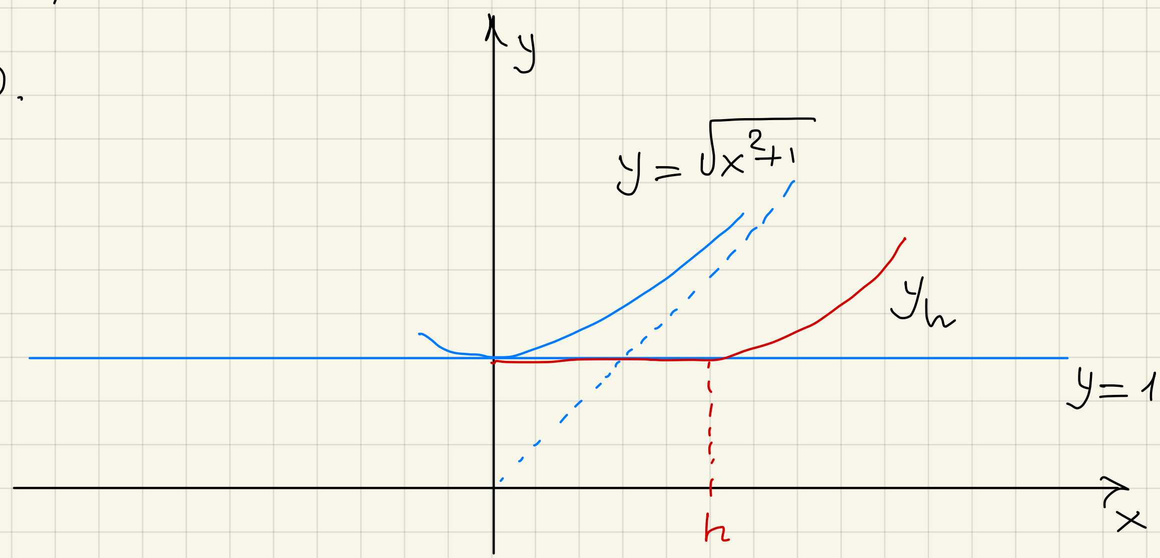
pertanto, un'altra soluzione è data dall'iperbole

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

In generale, qualunque funzione del tipo

$$y_h = \begin{cases} 1 & x \leq h \\ \sqrt{(x-h)^2+1} & x > h \end{cases}$$

con $h \geq 0$, è soluzione. La situazione è data in figura sotto.



(4) $\begin{cases} e^x + \sin z + \ln(1+y) - 1 = 0 \\ \cos y - e^{xz} + 2x + 5z = 0 \end{cases}$

Osserviamo che $f_1$, $f_2$ sono di classe $C^\infty$ in

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad y > -1\}$ e $O(0,0,0) \in A$

Inoltre

$$f_1(0,0,0) = e^0 + \ln 1 - 1 = 0$$
$$f_2(0,0,0) = 1 - e^0 = 0$$

Infine,

$$J_{\underline{f}} = \begin{bmatrix} e^x & \frac{1}{1+y} & \cos z \\ 2 - ze^{xz} & \sin y & 5 - xe^{xz} \end{bmatrix}$$

$$J_{\underline{f}}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y,z)}(0,0,0) = 5 \neq 0$$

Pertanto, tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate e il sistema è univocamente risolubile rispetto a $(y,z)$ in un intorno dell'origine.

La retta tangente può essere scritta come l'intersezione dei piani tangenti alle superfici $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ date dalle equazioni $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$.

Pertanto

$$r_{tg} : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases}$$

(5) $f = x^2 - y^2 + z$, $\qquad \Gamma: \begin{cases} z - y^2 = x \\ y - x^2 = z \end{cases}$

Osserviamo che possiamo riscrivere $\Gamma$ come

$$\begin{cases} y - x^2 - y^2 = x \\ z = y - x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 0 \\ z = y - x^2 \end{cases}$$

La prima equazione si riscrive

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Pertanto, $\Gamma$ si può parametrizzare come

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \\ z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Sfruttando inoltre il vincolo, abbiamo

$$f = x^2 - y^2 + z = \cancel{x^2} - y^2 + y \cancel{- x^2} = y - y^2$$

Pertanto, cerchiamo massimo e minimo assoluti di

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t\right)^2$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Abbiamo

$$f(t) = \frac{1}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 t \cancel{- \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 t$$

E' evidente che

$$m = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \qquad M = \frac{1}{4}$$