

$$\textcircled{1} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{\sqrt{9x^2 + 9y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{4\rho^2 \sin \theta \cos \theta}{3\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{4}{3} \rho \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

Quindi la funzione è continua nell'origine.

Considerato un generico vettore $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$, abbiamo

$$\begin{aligned} D_{\underline{v}} f(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - f(0,0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2 \sin \theta \cos \theta}{3|t| \cdot t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4}{3} \frac{t}{|t|} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Poiché tale limite non esiste, ^($\theta \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$) non esiste neppure la generica derivata ^($\theta \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$) direzionale. Essendo con ciò negata la C~~1~~ di differenziabilità, concludiamo che f non è differenziabile in $(0,0)$.

$$\textcircled{2} \quad \nabla f = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3y = 0 \\ 3x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (0,0)$$

$H_f = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ Poiché H_f è indefinita, $(0,0)$ è punto di sella e, conseguentemente, max e min assoluti forzatamente si trovano sul bordo.

Parametizziamo il bordo di K come

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Conseguentemente

$$f|_{\partial K} = 34 \cos t + 4 \sin t = 48 \cos t \sin t = 24 \sin 2t$$

Poiché

$$\begin{aligned} \max \sin 2t &= 1 \\ \min \sin 2t &= -1 \end{aligned}$$

concludiamo che

$$\max_K f = 24, \quad \min_K f = -24$$

③

$$\begin{cases} xy'' - 2y' = 0 \\ y(1) = 2 \quad y'(1) = 3 \end{cases}$$

Effettuiamo un cambiamento di variabile e poniamo $y' = z$
Abbiamo

$$x z' = 2z$$

$$z' = \frac{2}{x} z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2}{x} dx$$

$$\ln z = 2 \ln|x| + C$$

$$\ln z = \ln k|x|^2$$

$$z = k|x|^2$$

Imponendo $y'(1) = 3 \Rightarrow z(1) = 3$ abbiamo $3 = k$

Perciò $y'(x) = 3x^2$ $y = x^3 + D$ e imponendo

$y(1) = 2$, abbiamo $y = x^3 + 1$

E' chiaro che $y \in C^\infty(\mathbb{R})$. Tuttavia ciò non era prevedibile in base alla teoria, perché l'equazione

si riscrive come sistema

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{2}{x} z \end{cases}$$

ossia

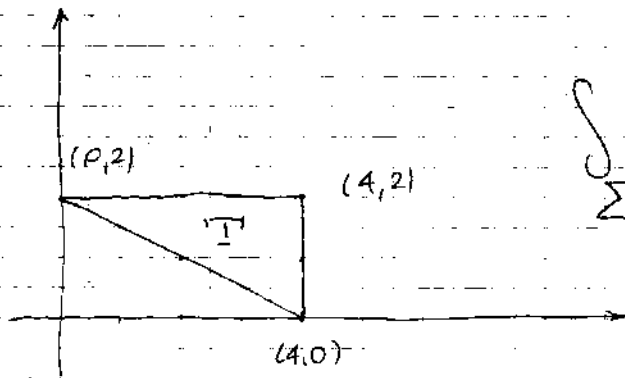
$$\underline{u}' = \underline{f}(x, \underline{u})$$

con $\underline{f}(x, \underline{u}) = \begin{cases} z \\ \frac{2}{x} z \end{cases}$

e $\underline{f} \in C^\infty(D)$ dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

e quindi la soluzione non è a priori definita in $x=0$.

④ $z = 2x + y^2$ $d\sigma_2 = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$
 $= \sqrt{1 + 4 + 4y^2} dx dy$



$$\int_T \frac{z - y^2}{\sqrt{5 + 4y^2}} d\sigma_2 = \int \frac{2x + y^2 - y^2}{\sqrt{5 + 4y^2}} \sqrt{5 + 4y^2} dx dy$$

$$= \int_T 2x dx dy = \int_0^4 dx \int_{2 - \frac{1}{2}x}^{2-T} 2x dy$$

$$= \int_0^4 2x [y]_{2 - \frac{1}{2}x}^{2-T} dx = \int_0^4 2x (2 - 2 + \frac{1}{2}x) dx$$

$$= \int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

⑤ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)^3}$

Poniamo momentaneamente
 $x - 2 = t$

Abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n+1)^3}$$

Con il criterio del rapporto è immediato verificare che $R = 1$

Inoltre $t = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} < +\infty$

$t = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} < +\infty$

Quindi la serie converge semplicemente e assolutamente per $|t| \leq 1$. Ritornando alla variabile x , concludiamo che la serie converge semplicemente ed assolutamente in

$$-1 \leq x - 2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad \sigma(\Gamma) &= \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{(-3 \sin 3t)^2 + \left(\frac{2}{3} t^{1/2}\right)^2 + (3 \cos 3t)^2} \, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{9 + 36t} \, dt = 3 \int_0^1 \sqrt{1 + 4t} \, dt \\ &= \frac{3}{4} \frac{(1 + 4t)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [5^{3/2} - 1] \end{aligned}$$

$\textcircled{7}$ È immediato verificare che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

Inoltre $f_z = -y^2 \cos z + e^x$

$$f(0,1,\pi) = -\sin \pi + \pi e^0 + 0 \cdot 1 - \pi = \pi - \pi = 0$$

$$f_x(0,1,\pi) = -\cos \pi + e^0 = 1 + 1 = 2$$

Poiché

$$f_x = ze^x + 2xy$$

$$f_x(0,1,\pi) = \pi e^0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = \pi$$

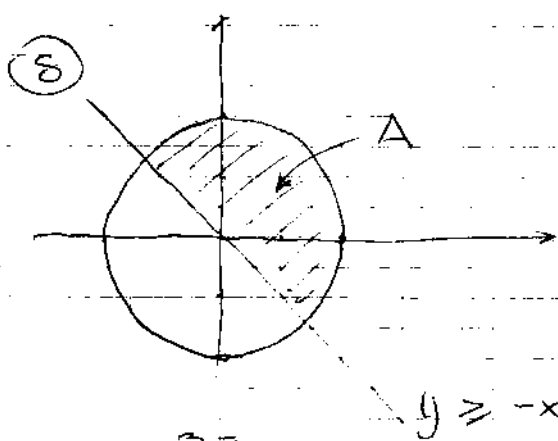
$$f_y = -2y \sin z + x^2$$

$$f_y(0,1,\pi) = -2 \sin \pi + 0 = 0$$

il piano tangente ha equazione

$$f_x(0,1,\pi)x + f_y(0,1,\pi)(y-1) + f_z(0,1,\pi)(z-\pi) = 0$$

$$\pi x + 2(z-\pi) = 0.$$



$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$V = \int_A (4+x) dx dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^2 (4 + \rho \cos \vartheta) \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(2\rho^2 + \frac{\rho^3}{3} \cos \vartheta \right) \Big|_0^2 d\vartheta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(8 + \frac{8}{3} \cos \vartheta \right) d\vartheta = \left[8\vartheta + \frac{8}{3} \sin \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 8\pi + \frac{8}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = 8\pi + \frac{8}{3} \sqrt{2}$$