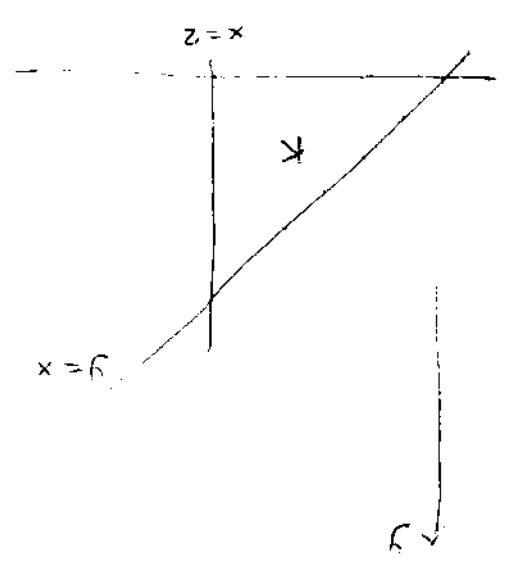


①



$$f = (x-4)^2 + 4y^2$$

$$\nabla f = (2(x-4), 8y)$$

Punto di gradiente annullato in $P(4,0)$ che non rappresenta il dominio, studio di comportamento di f sui bordi.

$$L_1: y=0 \quad x \in [0,2]$$

$$f|_{L_1} = (x-4)^2 = g_1(x)$$

$$g_1' = 2(x-4)$$

$$m_1 = g_1(2) = 4$$

$$M_1 = g_1(0) = 16$$

Infalli $g_1' < 0 \quad \forall x \in [0,2]$, dunque massimo e minimo sono assunti agli estremi.

$$L_2: x=2 \quad y \in [0,2]$$

$$f|_{L_2} = 4 + 4y^2 = g_2(y)$$

$$g_2' = 8y$$

Dunque

$$m_2 = g_2(0) = 4$$

$$M_2 = g_2(2) = 20$$

$$L_3: y=x \quad x \in [0,2]$$

$$f|_{L_3} = (x-4)^2 + 4x^2 = 5x^2 - 8x + 16 = g_3(x)$$

$$g_3' = 10x - 8$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha - \beta = 0 \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha + 2\beta = 0 \quad h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinants of cofactors corresponding

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

⑤ Determinants of cofactors of A. Abbiamo

$$\mathcal{D}_v f(t, u) = \frac{f(t, u) - f(t, 0)}{u} = \frac{f(t, u) - f(t, 0)}{u} = \frac{f(t, u) - f(t, 0)}{u} = \frac{f(t, u) - f(t, 0)}{u}$$

$$\textcircled{2} \quad P_{\text{osb}} \quad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \text{abbiamo}$$

$$M = \max \{ M_1, M_2, M_3 \} = \max \{ 16, 20, 20 \} = 20 \quad m = \min \{ m_1, m_2, m_3 \} = \min \{ 4, 4, \frac{5}{4} \} = 4$$

$$g_3(0) = 16 \quad g_3(2) = 20 \quad \Rightarrow \quad M_3 = 20$$

$$m_3 = g_3\left(\frac{5}{4}\right) = 8 \cdot \frac{16}{5} - 8 \cdot 4 + 16 = 16 - \frac{32}{5} = \frac{48}{5}$$

L'integrale generale, dunque, è dato da

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2x}$$

La soluzione del PB di Cauchy si ricava da

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

$$3C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_2 = 1$$

Dunque, l'integrale particolare è $\vec{x} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}$

④ Poniamo

$$x - 2 = t \quad \text{ed otteniamo}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \ln(n+2)$$

bramo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+2) \ln(n+3)}}{\frac{1}{(n+1) \ln(n+2)}} = 1$$

E quindi $R = 1$. Valutiamo $t = \pm 1$

Se $t = 1$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+2)}$$

La serie diverge (sia semplicemente, sia assolutamente)

Se $t = -1$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln(n+2)}$$

La serie converge semplicemente, ma diverge assolutamente.

⑤ dunque

$$\begin{aligned} I &= \{ -1 < t < 1 \} \\ J &= \{ 1 < x < 3 \} \end{aligned}$$

Passando alla rappresentazione parametrica di Γ , abbiamo

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \cos \theta \\ y = \frac{a}{2} \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$\textcircled{5} \int \arctan \frac{x}{y} d\sigma$$

Γ

Però $\int \arctan \frac{x}{y} d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{a/2}^{a/2} \arctan \frac{\frac{a}{2} \cos \theta}{\frac{a}{2} \sin \theta} \frac{a}{2} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{a/2}^{a/2} \frac{1}{\tan \theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{a/2}^{a/2} \cot \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\ln |\sin \theta| \right]_{a/2}^{a/2} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\sin \theta| d\theta$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\sin \theta| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\sin \theta| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\sin \theta| d\theta$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \ln |\sin \theta| &= \frac{1}{\sin \theta} \cos \theta = \cot \theta \\ \frac{d}{d\theta} \ln |\cos \theta| &= \frac{1}{\cos \theta} (-\sin \theta) = -\tan \theta \end{aligned} \right)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\sin \theta| d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\cos \theta| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\sin \theta| d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |\cos \theta| d\theta$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos(\theta - \pi/2)} = \frac{1}{\cos \phi} \quad \text{con } \phi = \theta - \pi/2$$

Però concludiamo che

$$\int \arctan \frac{x}{y} d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{a/2}^{a/2} \arctan \frac{x}{y} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{a/2}^{a/2} \arctan \frac{x}{y} d\theta$$

$\textcircled{6}$ La superficie Σ è una sfera di centro "origine" e raggio 2

Dato un punto $P(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, l.c. $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, il

vettore normale nel proprio di direzione del vettore gradiente.

Dunque, i punti: $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$

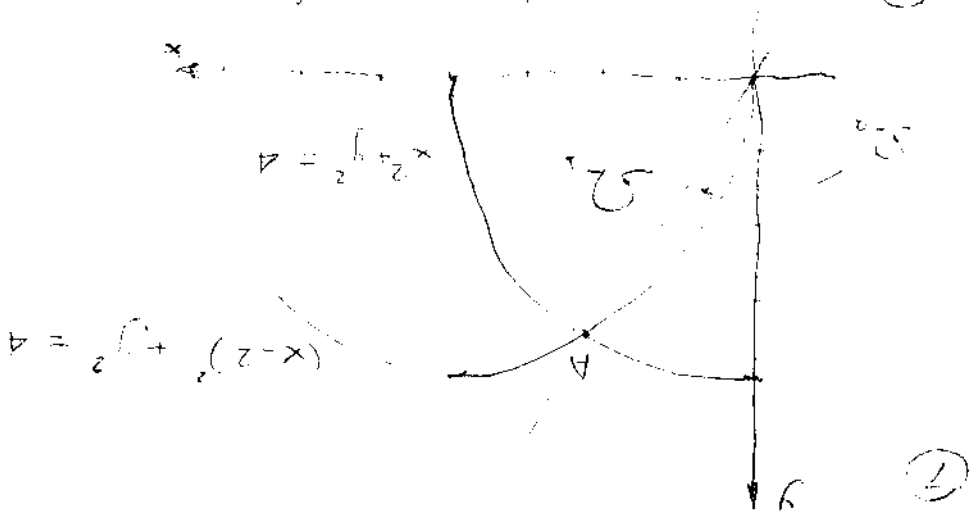
$$m_1 = \frac{1}{4}(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$$

$$m_2 = \frac{1}{4}(0, 0, 4)$$

Potete

$$\langle m_1, m_2 \rangle = 0$$

è chiaro che i due vettori sono fra loro ortogonali



Passando in coordinate polari

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\rho = 2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$\rho = 4 \cos \theta$$

Il punto A di intersezione fra le due circonferenze è dato da

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \rho = 4 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \theta = \pi/3 \end{cases} \Rightarrow \rho = 2$$

Quindi, scomponiamo $z_2 = z_1 \cup z_2$ dove

$$z_1 = \left\{ 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$z_2 = \left\{ 0 \leq \rho \leq 4 \cos \theta, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$|I_2| = \iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{4 \cos \theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\frac{2}{\cos \theta}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta = \left[\frac{1}{2} \cdot 16 \cos^2 \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\cos^2 \theta} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16 \cos^2 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{\cos^2 \theta} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2} \pi + 8 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2}{1 + \cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \pi + 4 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{2} \pi + 4 \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + 2 \left(\sin \pi - \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{3}{2} \pi + \frac{3}{2} \pi - 2 \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \pi - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{2} \pi + \frac{3}{2} \pi - 2 \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \pi - \frac{2}{3}$$

③ Poiché Δ è un insieme convesso (e quindi la sua frontiera) per verificare che f è convessa, basta calcolare la sua matrice Hessiana e verificare che è definita positiva.

Abbiamo

$$\nabla f = (2x, 16y)$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

f è univariato convesso che H_f è ad. positiva: ciò è possibile, ma concludere che f è strettamente convesso in Δ .