

$$\textcircled{1} \quad f = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

1

$$f(0,0) = \ln 1 = 0$$

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente si calcola $f_y(0,0) = 0$.

Per controllare, quindi, che f è differenziabile in $(0,0)$ occorre mostrare che

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0. \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Consideriamo l'equazione omogenea $z'' + 4z' + 8z = 0$

e l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$

Le radici sono $\lambda = -2 \pm 2i$

Quindi avremo

$$z = e^{-2x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$$

$$y = e^{-2x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + y_p$$

Inoltre

$$y_p = Ax + B + D \cos x + E \sin x$$

$$y_p' = A - D \sin x + E \cos x$$

$$y_p'' = -D \cos x - E \sin x$$

Sostituendo

12

$$\begin{cases} -D \cos x & -E \sin x \\ +4E \cos x & -4D \sin x & +4A \\ +8D \cos x & +8E \sin x & +8B & +8A x = 3x + 2 \sin x \end{cases}$$

Perciò

$$\begin{cases} 8A = 3 \\ 4A + 8B = 0 \\ 7E - 4D = 2 \\ 7D + 4E = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= 3/8 \\ B &= -\frac{3}{16} \\ D &= -\frac{8}{65} \\ E &= \frac{14}{65} \end{aligned}$$

Quindi

$$y = e^{-2x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16} + \frac{8}{65} \cos x + \frac{14}{65} \sin x.$$

② $f = \sin x + \sin y$

$$\begin{cases} f_x = \cos x = 0 & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ f_y = \cos y = 0 & y = \frac{\pi}{2} + h\pi \end{cases}$$

L'unica radice che cade in $k \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Indire

$$f_{xx} = -\sin x \quad f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = -\sin y$$

Perciò

$$H_f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ed è immediato verificare che il punto è di massimo locale
e $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2$

Consideriamo f sui quattro lati costituenti il bordo.

$$l_1: \begin{cases} y=0 \\ x=t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

$$f|_{l_1} = \sin t$$

$$m_1 = 0$$

$$M_1 = 1$$

$$l_2: \begin{cases} x=\pi \\ y=t \end{cases}$$

$$f|_{l_2} = \sin t$$

$$m_2 = 0$$

$$M_2 = 1$$

$$l_3: \begin{cases} x=t \\ y=\pi \end{cases}$$

$$f|_{l_3} = \sin t$$

$$m_3 = 0$$

$$M_3 = 1$$

$$l_4: \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$$

$$f|_{l_4} = \sin t$$

$$m_4 = 0$$

$$M_4 = 1$$

Precio

$$m_{\text{ass}} = 0$$

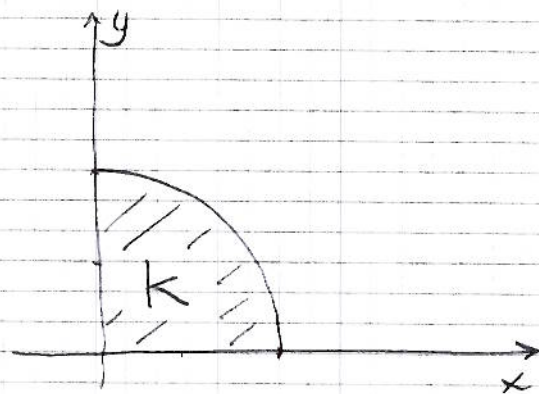
$$M_2 = 2$$

$$\textcircled{4} \quad \int_{\Sigma} z \, d\sigma_2 = \int_K xy \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_K xy \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$$

In coordinate polari, $\vec{e}$

$$K: \begin{cases} 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$



Precio allora

$$\begin{aligned} \int_K xy \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sqrt{1+\rho^2} \rho \, d\rho \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1+\rho^2} \rho \, d\rho \end{aligned}$$

Poniamo $1+\rho^2 = t^2$
 $\rho \, d\rho = t \, dt$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) \sqrt{t^2} t dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) t^2 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} \right] = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right] = \sqrt{2} \frac{1}{15}
 \end{aligned}$$

⑤ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} (x-3)^n$ Poniamo per semplicità $x-3=t$

Ci riduciamo a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} t^n$.

Con il criterio del rapporto è immediato verificare che $R=1$
Inoltre la serie converge semplicemente e assolutamente
per $t = \pm 1$.

Perciò concludiamo che

$$I \equiv J = \{ |x-3| \leq 1 \}$$

$$I \equiv J = \{ -1 \leq x-3 \leq 1 \}$$

$$I \equiv J = \{ 2 \leq x \leq 4 \}$$

⑥ $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \begin{cases} dx = (1-2t) dt \\ dy = 2t dt \end{cases}$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} y dx + (x-1) dy &= \int_0^1 [t^2(1-2t) + (t-t^2-1)2t] dt \\
 &= \int_0^1 (t^2 - 2t^3 + 2t^2 - 2t^3 - 2t) dt = \int_0^1 (3t^2 - 4t^3 - 2t) dt \\
 &= t^3 - t^4 - t^2 \Big|_0^1 = -1.
 \end{aligned}$$

(7) $f = xe^y + ye^z + ze^x$

(5)

f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$

Indtro $f_z = ye^z + e^x$

$f(0,0,0) = 0$

$f_z(0,0,0) = 1$

Dunque possiamo applicare il Teo di Dini e concludere che f è univocamente risolubile rispetto a z .

Poiché

$f_x = e^y + ze^x$

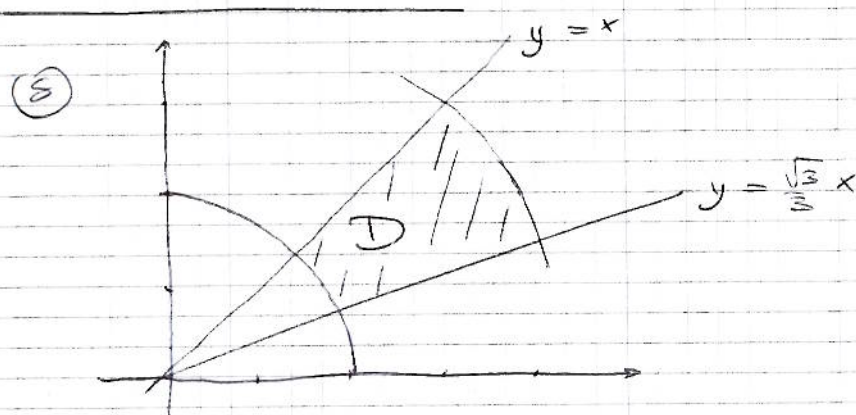
$f_x(0,0,0) = 1$

$f_y = xe^y + e^z$

$f_y(0,0,0) = 1$

concludiamo che il piano tangente è dato da

$x + y + z = 0.$



In coordinate polari è

$D: \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Perciò

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{e^{\arctg y/x}}{1+x^2+y^2} dx dy &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \frac{e^{\arctg \tg \theta}}{1+\rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^\theta d\theta \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho = \left[e^\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} \ln(1+\rho^2) \right]_1^2 \\ &= \frac{(e^{\pi/4} - e^{\pi/6})}{2} \left(\ln \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$