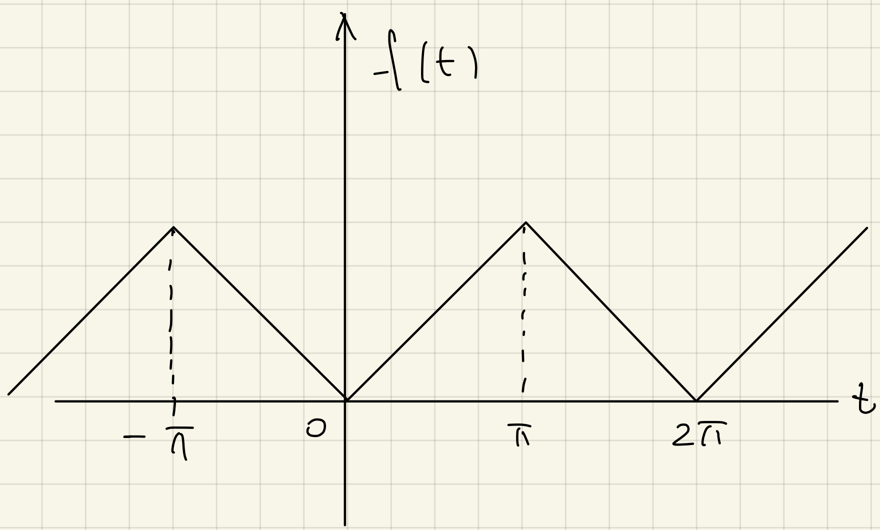
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, pari, definita da $f(t) = t$ se $t \in [0, \pi]$. Il grafico è sotto in figura



È chiaro che $f \in C^0(\mathbb{R})$. Inoltre è limitata. Pertanto $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ed è sviluppabile in serie di Fourier.

Poiché f è pari, avremo $b_n = 0$. Inoltre

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t\, dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n}\,dt\right] = \frac{2}{\pi}\;\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\;\frac{(-)^n - 1}{n^2}$$

La serie di Fourier è, dunque,

$$S(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{n^2}\cos nt$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1-1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t$$

Poiché $f \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie converge alla funzione nel senso dell'energia, ossia

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(t)|^2\,dt = 0 .$$

dove

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt$$

Inoltre, per quanto riguarda la convergenza puntuale, osserviamo che

1) $\forall t \neq k\pi$ f è continua e derivabile in t, per cui $S(t) = f(t)$

2) $\forall t_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f è continua in t_k e le derivate destra e sinistra sono finite, anche se diverse. Pertanto $S(t_k) = f(t_k)$

Infine, f è di classe C^1 a tratti e, dunque, la serie converge uniformemente alla funzione nel perio do (e dunque anche in $\mathbb{R}$), ossia

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - S_N(t)| = 0.$$

Facendo ricorso alla convergenza puntuale in $t = 0$, abbiamo

$$S(0) = f(0) \implies \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 0$$

da cui otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Utilizzando l'identità di Parseval, abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right],$$

ossia

$$2\int_0^{\pi} t^2\,dt = \pi\left[\frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\,\frac{1}{(2k+1)^4}\right]$$

$$2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} - \frac{\pi^3}{2} = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{4-3}{6}\,\pi^3 = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

da cui ricaviamo $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

---

2 Se effettuiamo, come indicato, la sostituzione

$$t = \frac{y}{x} \implies y = xt \implies y' = t + xt'$$

otteniamo

$$\cancel{t} + xt' = \cancel{t} + \cos^2 t \qquad t' = \frac{1}{x}\cos^2 t$$

Si tratta di una equazione a variabili separabili, da cui otteniamo

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\tan t = \ln |x| + C$$

o anche

$$\tan t = \ln kx$$

da cui ricaviamo

$$\tan \frac{y}{x} = \ln kx$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = \pi/4$, otteniamo

$$\tan \frac{\pi}{4} = \ln k$$

$$1 = \ln k \implies k = e$$

Pertanto, l' integrale particolare cercato è

$$\tan\frac{y}{x} = \ln(ex)$$

Poiché la condizione iniziale è assegnata per

$\frac{y_0}{x_0} = \pi/4$, ossia con $\frac{y_0}{x_0} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, possiamo

invertire la funzione tangente e ricavare

$$\frac{y}{x} = \arctan\left[\ln(ex)\right]$$

$$y = x \arctan\left[\ln(ex)\right]$$

---

(3) Consideriamo dapprima il sistema lineare omogeneo associato, ossia

$$z' = A z \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Cerchiamone gli autovalori

Abbiamo

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 3 \\ -2 & \lambda-5 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{bmatrix} = 0$$

da cui

$$(\lambda-5)(\lambda^2 - 3\lambda - 4 + 6) = 0$$

$$(\lambda-5)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Ricaviamo $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 5.$

Calcoliamo i corrispondenti autovettori. Abbiamo

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\gamma = 0 \\ \cancel{2}\alpha + \underset{2}{\cancel{4}}\beta + \cancel{2}\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -4 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{3}\alpha + \cancel{3}\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 5 \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} 6e^{x} & e^{2x} & 0 \\ -e^{x} & 0 & e^{5x} \\ -4e^{x} & -e^{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

dove C_1, C_2, C_3 sono costanti arbitrarie. Per determinare l'integrale generale del sistema completo, anziché il Metodo della variazione delle costanti arbitrarie, possiamo utilizzare il suggerimento che si tratta di un vettore di costanti, da determinare.

Se poniamo $$y_p = \begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix} \Longrightarrow y_p' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avremo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo $$\begin{cases} -H \quad\quad -3L = -8 \\ 2H + 5K + 2L = 0 \\ 2H \quad\quad +4L = 8 \end{cases}$$

da cui facilmente otteniamo $\begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Quindi, l'integrale generale cercato è

$$y = \begin{bmatrix} 6e^{x} & e^{2x} & 0 \\ -e^{x} & 0 & e^{5x} \\ -4e^{x} & -e^{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

---

(4) $\ln(x+y+z) + \sinh(yz) = 0$

Posto $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z > 0 \}$ e

$f(x,y,z) = \ln(x+y+z) + \sinh(yz)$

è chiaro che $f \in C^\infty(A)$. A è un

insieme aperto.

Inoltre $f(0,0,1) = 0$ e

$$f_x = \frac{1}{x+y+z} \qquad f_x(0,0,1) = 1$$

$$f_y = \frac{1}{x+y+z} + z\cosh(yz) \qquad f_y(0,0,1) = 2$$

$$f_z = \frac{1}{x+y+z} + y\cosh(yz) \qquad f_z(0,0,1) = 1$$

Tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate e possiamo pertanto concludere che l'equazione $f(x,y,z)=0$ è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno di $P(0,0,1)$. La funzione $z = g(x,y)$ con $g : B_{r_1}(0,0) \longrightarrow I_{r_2}(1)$ è di classe C^∞ ed ha le seguenti proprietà:

1) $g(0,0) = 1$,

2) $\forall (x,y) \in B_{r_1}(0,0) \qquad f(x,y,g(x,y)) \equiv 0$.

Inoltre

$$g_x(0,0) = -\frac{f_x(0,0,1)}{f_z(0,0,1)} = -1$$

$$g_y(0,0) = -\frac{f_y(0,0,1)}{f_z(0,0,1)} = -2$$

Poiché il polinomio di Mc-Laurin cercato ha espressione

$$\begin{aligned} P_2((x,y);(0,0)) = {} & g(0,0) + g_x(0,0)x + g_y(0,0)y + \\ & + \frac{1}{2}\Big[g_{xx}(0,0)x^2 + 2g_{xy}(0,0)xy + \\ & + g_{yy}(0,0)y^2 \Big] \end{aligned}$$

dobbiamo calcolare le derivate seconde di g.
Per far questo partiamo da $f(x,y,g(x,y)) \equiv 0$
ed otteniamo

$$\ln(x+y+g(x,y)) + \sinh(y\,g(x,y)) \equiv 0$$

$$\frac{1+g_x}{x+y+g} + y\,g_x \cosh(yg) = 0$$

da cui, sostituendo, ricaviamo come già noto $g_x(0,0) = -1$

Analogamente

$$\frac{1+g_y}{x+y+g} + (g+y\,g_y)\cosh(yg) = 0$$

da cui, ancora come noto,

$$1 + g_y(0,0) + 1 = 0 \implies g_y(0,0) = -2$$

Passando alle derivate seconde, abbiamo

$$\frac{g_{xx}(x+y+g)-(1+g_x)^2}{(x+y+g)^2}+y\,g_{xx}\cosh(yg)+$$

$$+(y g_x)^2\sinh(yg)\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad g_{xx}(0,0)=0$$

$$\frac{g_{yy}(x+y+g)-(1+g_y)^2}{(x+y+g)^2}+(2g_y+y\,g_{yy})\cosh(yg_y)+$$

$$+(g+yg_y)^2\sinh(yg)\equiv 0$$

$$g_{yy}(0,0)-1+2\cdot(-2)\cdot 1=0 \quad\Longrightarrow\quad g_{yy}(0,0)=5$$

$$\frac{g_{xy}(x+y+g)-(1+g_x)(1+g_y)}{(x+y+g)^2}+(g_x+y\,g_{xy})\cosh(yg)+$$

$$+ \; y g_x (g + y g_y) \sinh(y g) \equiv 0$$

$$g_{xy}(0,0) + (-1)\cdot 1 = 0 \implies g_{xy} = 1$$

Pertanto

$$P_2((x,y);(0,0)) = 1 - x - 2y + \frac{1}{2}(2xy + 5y^2)$$

---

(5) Dovendo cercare il <u>massimo</u> di $f = xyz$ sul vincolo dato da $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$, dalle simmetrie della funzione e del vincolo, è evidente che è sufficiente limitarsi al settore

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0\}$$

Se applichiamo il Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, lavoriamo con

$$\mathcal{L} = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} - 1\right)$$

Imponendo la condizione necessaria, cerchiamo in A le soluzioni di

$$\begin{cases} yz + \frac{2}{3}\lambda x = 0 & \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{2}\frac{yz}{x} \\ xz + \frac{1}{2}\lambda y = 0 & \Longrightarrow \quad \lambda = -2\frac{xz}{y} \\ xy + \frac{1}{8}\lambda z = 0 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\frac{yz}{x} = -2\frac{xz}{y} \\ xz + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \\ xy + \frac{1}{8}\lambda z = 0 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow z(3y^2 - 4x^2) = 0$

Per quanto detto prima, possiamo scartare $z = 0$ e limitarci a $3y^2 - 4x^2 = 0$

Abbiamo, quindi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} = \frac{y^2}{4} \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} y \\ 2\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} yz + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} y^2 + \frac{1}{8}\lambda z = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Possiamo scartare $y = 0$ e ricavare

$\lambda = \mp\sqrt{3}\, z$

Sostituendo nell'ultima equazione

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2} y^2 + \frac{1}{8}(\mp \sqrt{3}) z^2 = 0 \implies y^2 = \frac{1}{4} z^2$$

Pertanto

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{y^2}{4} \\ y^2 = \dfrac{1}{4} z^2 \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{4} z^2 + \dfrac{z^2}{16} = 1 \qquad \dfrac{3}{16} z^2 = 1 \end{cases}$$

Se ci limitiamo alla soluzione positiva, abbiamo

$$z = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}\,\frac{16}{3} \implies y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x^2}{3} = \frac{1}{4}\,\frac{4}{3} \implies x = 1$$

Il punto in A che verifica la CN è, pertanto,

$P\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

Poichè il vincolo è un compatto, il massimo è assunto sicuramente e necessariamente nel punto P individuato. Quindi

$$M = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}$$

Si può risolvere anche senza utilizzare il Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Poichè il massimo può essere cercato in A, possiamo osservare che il punto di massimo di f coincide con il punto di massimo di $f^2 = x^2 y^2 z^2$

Quindi, possiamo ricavare z^2 dal vincolo, ottenendo

$$z^2 = 16\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4}\right) \quad \text{con} \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

Sostituendo, dobbiamo cercare il punto di massimo assoluto di

$$g = 16x^2y^2\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4}\right)$$

in $K = \left\{ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ limitandoci a considerare $x > 0$, $y > 0$

Se imponiamo la CN, abbiamo

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \cancel{32}\,\cancel{x}\,\cancel{y}^2\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4}\right) - \frac{\cancel{2}}{3}\cancel{x}\cdot\cancel{16}x^2\cancel{y}^2 = 0 \\ {}^{2}\cancel{32}\,\cancel{x^2}\,\cancel{y}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\cancel{y}\cdot\cancel{16}\cancel{x^2}y^2 = 0 \end{array}$$

Semplificando, abbiamo

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{3} = 0 \\ 4 - \dfrac{4}{3}x^2 - y^2 - y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 = 1 \\ \dfrac{4}{3}x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4\left(1 - \dfrac{2}{3}x^2\right) \\ y^2 = 2 - \dfrac{2}{3}x^2 \end{cases} \Longrightarrow \qquad 2 - \dfrac{2}{3}x^2 = 4 - \dfrac{8}{3}x^2$$

$$\dfrac{6}{3}x^2 = 2 \Longrightarrow x = 1$$

Sostituendo

$$y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$$

$$z = 4\sqrt{1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$$

Chiaramente, il punto è il medesimo $P\left(1, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

Anche in questo caso, l'insieme su cui si cerca il massimo è un insieme compatto e, quindi, il punto P è quello in cui il massimo è assunto. Come con il Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, troviamo che

$$m = f\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3}.$$