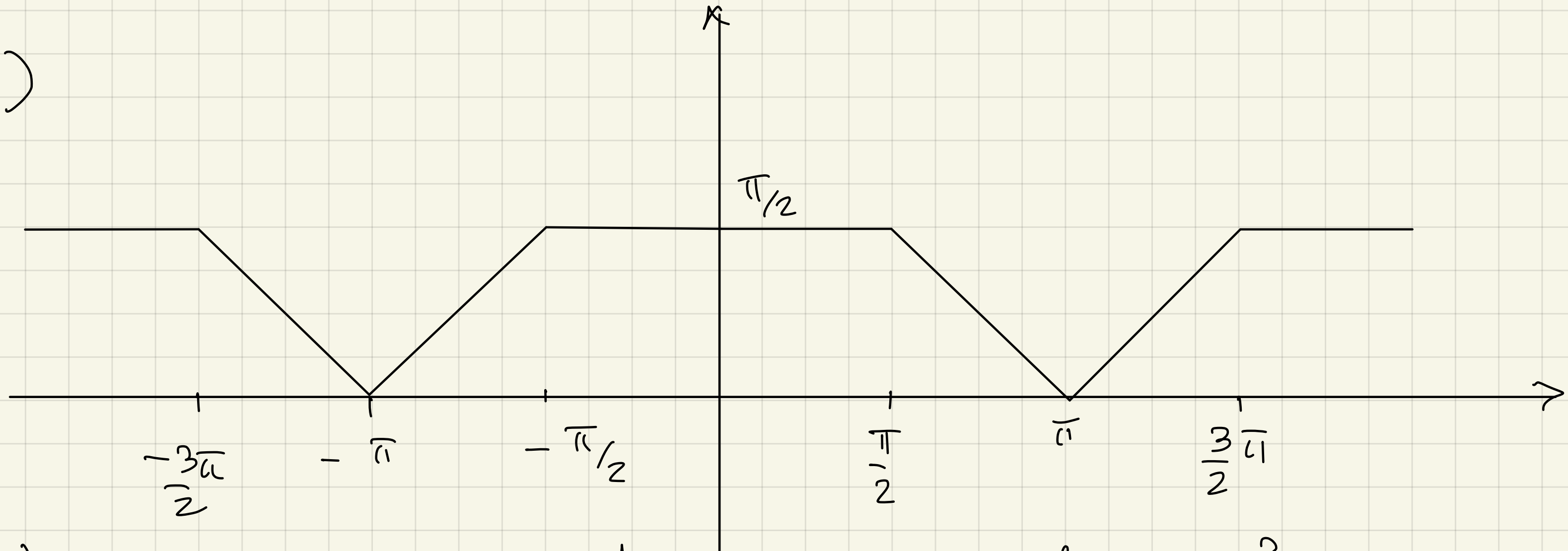
① $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - t, & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ $\quad f$ 2π – periodica, $\quad f$ pari

a)



È immediato verificare che $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\left[\int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4} dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)^2 dt\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}(-1)(\pi - t)^3 \Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi^3}{8} + \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8}\right] = 2\frac{\pi^3}{8}\frac{4}{3} = \frac{\pi^3}{3} < +\infty$$

Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, è sviluppabile in serie di Fourier.

b) Poiché f è pari, $b_n = 0 \quad \forall n$

Inoltre

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}(\pi - t)^2\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{4}\,\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\pi \implies \frac{a_0}{2} = \frac{3}{8}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi/2} + (\pi - t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \int\frac{\sin nt}{n}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin n\pi/2}{n}} - \cancel{\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin n\pi/2}{n}} - \frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[- \frac{(-)^n}{n^2} + \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2} \right]$$

Quindi

$$S = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2} - (-)^n}{n^2} \cos nt$$

c) Poiché $f \in L^2(-\pi,\pi)$, certamente $f(t) \stackrel{L^2}{=} S(t)$, ossia

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0.$$

Inoltre $\forall\, t \in [-\pi,\pi]$ f è continua e derivabile, oppure continua e dotata di derivate destra e sinistra finite. Pertanto, $\forall\, t \in [-\pi,\pi]$ abbiamo

$$f(t) = S(t).$$

Infine, f è di classe C^1 a tratti e quindi la serie di Fourier converge alla funzione uniformemente, ossia

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t) - S_N(t)| = 0.$$

d) In $t=0$ abbiamo $f(0) = S(0)$, ossia

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2} - (-)^n}{n^2}$$

Osserviamo che se $n = 2k+1$ è $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$.

Pertanto, abbiamo

$$\left(\frac{4}{8}\pi - \frac{3}{8}\pi\right)\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-)^{2k+1}}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi - 1}{4k^2}$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi - 1}{4k^2}$$

cioè

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \cancel{\sum_{l=1}^{2} \frac{1-1}{4(2l)^2}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{-1-1}{4(2l+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

avendo considerato separatamente

$$k = 2l \implies \cos k\pi = \cos 2l\pi = 1$$

$$k = 2l+1 \implies \cos k\pi = \cos(2l+1)\pi = -1$$

e) Applicando l'identità di Parseval, abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right]$$

ossia

$$\frac{\pi^3}{3} = \pi \left[\frac{1}{2} \frac{9}{16} \pi^2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cos n\frac{\pi}{2} - (-)^n\right)^2}{n^4} \right]$$

$$\left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{9}{32}\pi^3\right] \cdot \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos k\pi - 1)^2}{16 k^4} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{32-27}{96}\,\frac{\pi^4}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{16(2\ell+1)^4} +$$

$$\cancel{+ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{0}{16(2\ell)^4}}$$

$$\frac{\cancel{5}^{\,1}}{96}\,\frac{\pi^4}{\cancel{4}} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

avendo, come prima, distinto $k = 2\ell$ e $k = 2\ell+1$

ed avendo banalmente osservato che

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

---

(2) $\underline{z}' = A\underline{z}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

Determiniamo autovalori ed autovettori

$\det(\lambda I - A) = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 + 4 = 0$ $\qquad (\lambda+3)^2 = -4$

$\lambda_1 = -3 + 2i$, $\lambda_2 = -3 - 2i$. Determiniamo $h_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 2i\alpha - 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 2i\beta = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $\alpha = 1$, $\beta = i \Longrightarrow \underline{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Due integrali linearmente indipendenti sono

$$z_1 = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 x} \underline{h}_1 \right), \qquad z_2 = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1 x} \underline{h}_1 \right)$$

Poiché

$$e^{\lambda_1 x} \underline{h}_1 = e^{-3x} (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-3x} \cos 2x + i e^{-3x} \sin 2x \\ i e^{-3x} \cos 2x - e^{-3x} \sin 2x \end{bmatrix}$$

concludiamo che

$$z_1 = \begin{bmatrix} e^{-3x} \cos 2x \\ -e^{-3x} \sin 2x \end{bmatrix}, \qquad z_2 = \begin{bmatrix} e^{-3x} \sin 2x \\ e^{-3x} \cos 2x \end{bmatrix}$$

Quindi, l'integrale generale del sistema è

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} e^{-3x}\cos 2x & e^{-3x}\sin 2x \\ -e^{-3x}\sin 2x & e^{-3x}\cos 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Imponendo $z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, abbiamo

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 1$$

Quindi l'integrale particolare cercato è

$$z = \begin{bmatrix} e^{-3x}\cos 2x & e^{-3x}\sin 2x \\ -e^{-3x}\sin 2x & e^{-3x}\cos 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ $y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

a) Se poniamo

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

Ω è determinato richiedendo che $f, f_y \in C^0(\Omega)$.

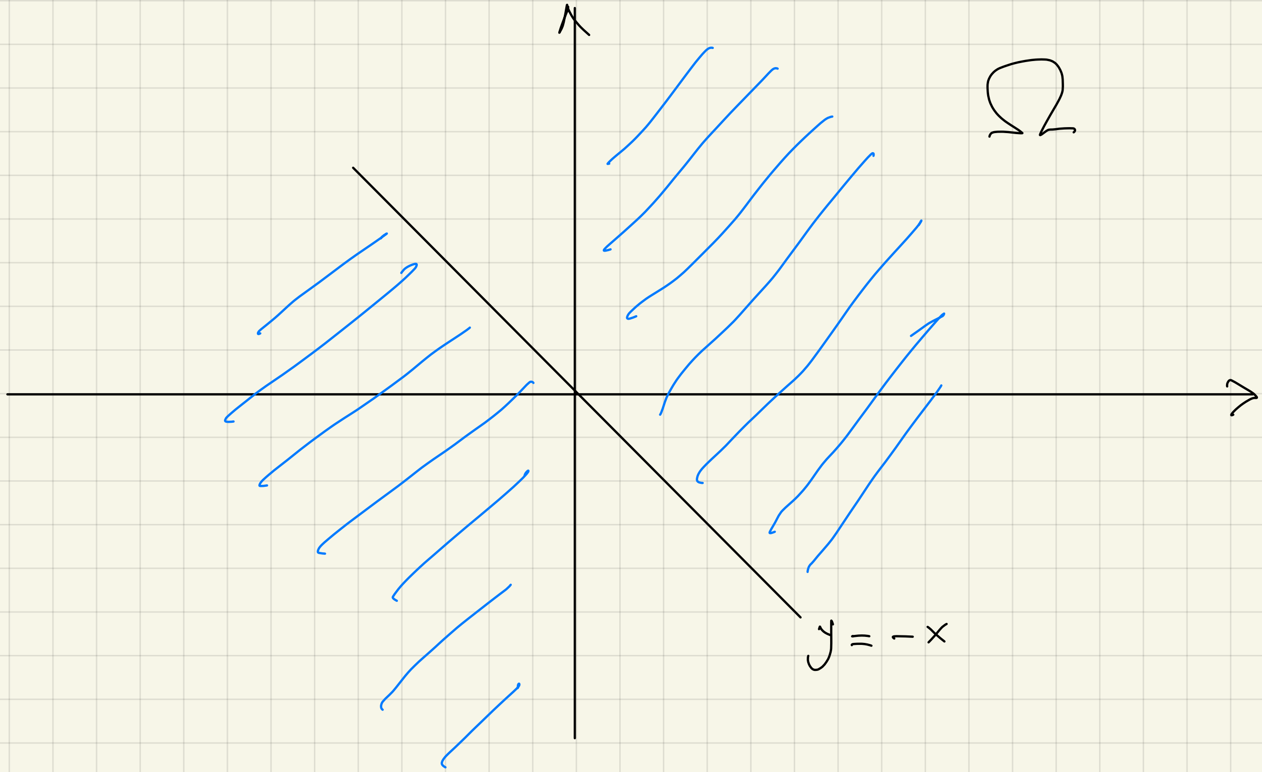
Pertanto, dovremo avere

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 + \frac{y}{x} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{y+x}{x} > 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y > -x \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ y < -x \\ x < 0 \end{cases}$$

Ω è indicato nel grafico qui sotto tratteggiato in blu



b) Se poniamo $\frac{y}{x} = t$ $\quad y = xt \Longrightarrow y' = xt' + t$,

otteniamo

$$xt' + \cancel{t} = \cancel{t} + (1+t)\ln(1+t)$$

$$t' = \frac{1}{x}(1+t)\ln(1+t)$$

Si tratta di una equazione a variabili separabili.

Se poniamo

$1+t=0 \qquad t=-1$ non accettabile

$\ln(1+t)=0 \qquad 1+t=1 \qquad t=0 \Rightarrow y=0$ acc.

otteniamo che

$$y=0 \qquad \text{con} \quad x>0$$

e

$$y=0 \qquad \text{con} \quad x<0$$

sono integrali particolari. Al contrario $t=-1$, ossia $y=-x$ non è accettabile, perché in corrispondenza si annulla l'argomento del logaritmo.

Se, ora, separiamo le variabili, abbiamo

$$\int \frac{1}{(1+t)\ln(1+t)}\, dt = \int \frac{dx}{x}$$

da cui ricaviamo

$$\ln|\ln(1+t)| = \ln kx$$

$$|\ln(1+t)| = kx$$

$$\ln(1+t) = kx$$

$$1+t = e^{kx} \qquad t = e^{kx} - 1$$

$$y = x\,(e^{kx} - 1)$$

Pertanto, l'integrale generale è dato da

$$\begin{cases} y = 0 \quad \text{con } x > 0, \qquad y = 0 \quad \text{con } x < 0 \\ y = x\,(e^{kx} - 1) \qquad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq \end{cases}$$

c) Infine, per quanto riguarda l'integrale particolare passante per il punto $P(1,0)$, è immediato verificare che si tratta della semiretta

$$y = 0 \qquad \text{con} \quad x > 0$$

---

(4) $$\ln(x+y+z) + \sinh(yz) = 0$$

Se poniamo $f(x,y,z) = \ln(x+y+z) + \sinh(yz)$ è immediato verificare che $f \in C^\infty(\Delta)$ dove

$$\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z > 0\}. \qquad P \in \Delta$$

Inoltre

$$f(P) = f(0,0,1) = \ln 1 + \sinh 0 = 0$$

$$f_z = \frac{1}{x+y+z} + y\cosh(yz), \quad f_z(0,0,1) = 1 \neq 0$$

Quindi le ipotesi del Teorema di Dini sono tutte verificate e l'equazione $f(x,y,z)=0$ è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno di P.

Detta $z = g(x,y)$ la funzione implicitamente definita da $f(x,y,z)=0$, il polinomio di Taylor cercato è

$$P_2(x,y;(0,0)) = g(0,0) + [g_x(0,0)x + g_y(0,0)y] +$$

$$+ \frac{1}{2}[g_{xx}(0,0)x^2 + 2g_{xy}(0,0)xy + g_{yy}(0,0)y^2]$$

Le derivate sono ben definite perché $g \in C^\infty$, dal momento che $f \in C^\infty(A)$. Inoltre, per definizione, $g(0,0)=1$

Per le derivate, da $f(x, y, g(x,y)) \equiv 0$, derivando rispetto a x e y, abbiamo.

$$\frac{1+g_x}{x+y+g} + y g_x \cosh(yg) \equiv 0,$$

$$\frac{1+g_y}{1+y+g} + (g + y g_y)\cosh(yg) \equiv 0,$$

da cui otteniamo sostituendo $x=0$, $y=0$, $g=1$

$$1 + g_x(0,0) = 0 \implies g_x(0,0) = -1$$

$$1 + g_y(0,0) + 1 \cdot 1 = 0 \implies g_y(0,0) = -2$$

Derivando ulteriormente, otteniamo le derivate seconde. Quindi

$$\frac{g_{xx}(x+y+g)-(1+g_x)^2}{(x+y+g)^2} + y g_{xx}\cosh(yg) + (y g_x)^2 \sinh(yg) \equiv 0,$$

$$\frac{g_{xy}(x+y+g)-(1+g_y)(1+g_x)}{(x+y+g)^2} + (g_x + y g_{xy})\cosh(yg) + y g_x (g + y g_y)\sinh(yg) \equiv 0$$

$$\frac{g_{yy}(1+y+g)-(1+g_y)^2}{(x+y+g)^2} + (2 g_y + y g_{yy})\cosh(yg) + (g + y g_y)^2 \sinh(yg) \equiv 0$$

Analogamente a prima, sostituendo

$x = 0$, $y = 0$, $g = 1$, $g_x = -1$, $g_y = -2$

otteniamo

$$g_{xx}(0,0) = 0$$

$$g_{xy}(0,0) - 1 = 0 \implies g_{xy}(0,0) = 1$$

$$g_{yy}(0,0) - 1 - 4 = 0 \implies g_{yy}(0,0) = 5$$

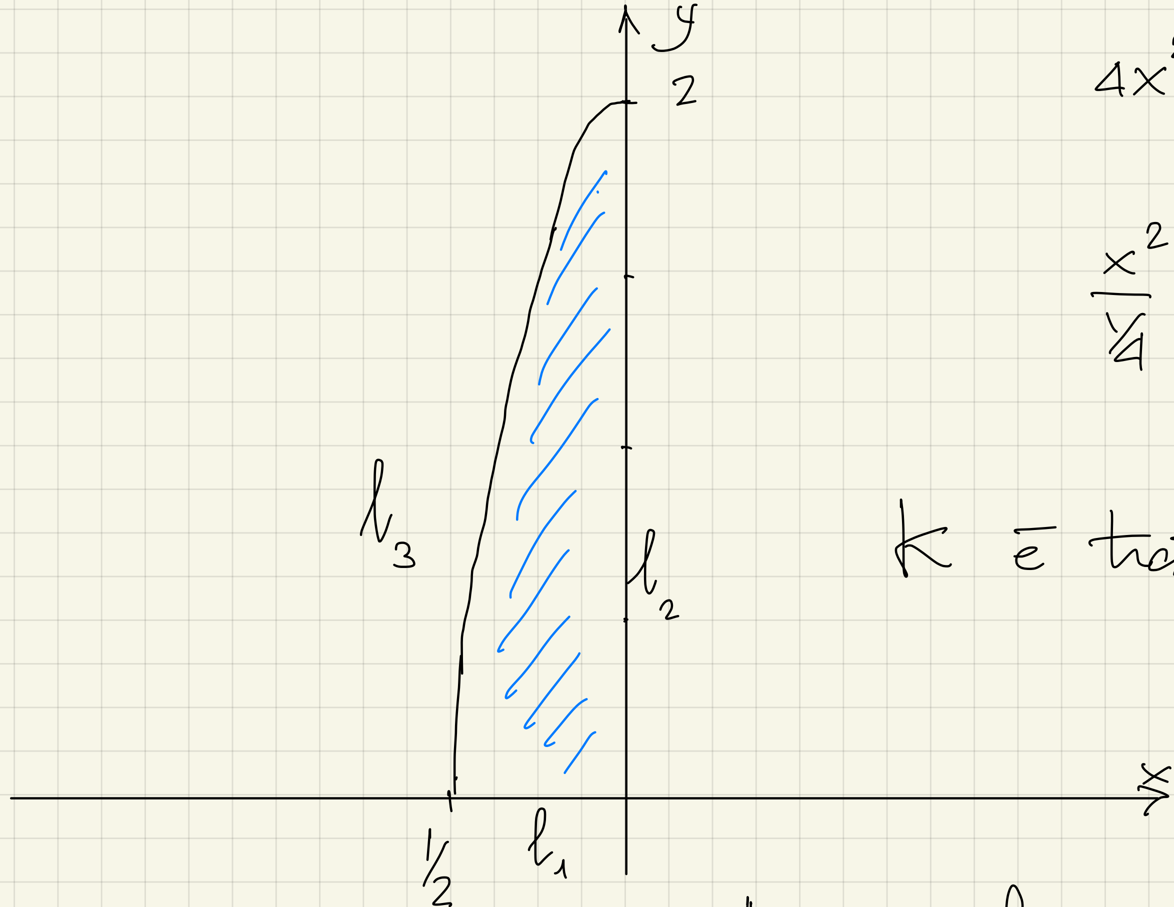
Pertanto concludiamo che

$$P_2(x,y;(0,0)) = 1 - x - 2y + \frac{1}{2}(2xy + 5y^2)$$

---

5. $f = \ln(x^2 + y^2 + x + 1)$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 0,$
$y \geq 0, \ 4x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$

Rappresentiamo K nel piano xy. Abbiamo



$$4x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

K è tratteggiato in blu

Poiché K è un compatto e f è continua su K, il massimo ed il minimo assoluto esistono sicuramente.
Se consideriamo i punti interni di K, dalla CN abbiamo

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad x = -\tfrac{1}{2},\ y = 0$$

Poichè $(-\frac{1}{2}, 0)$ appartiene alla frontiera di K, evitiamo di applicare la CS e studiamo direttamente il comportamento su ∂K. Osserviamo che

$$\partial K = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$$ dove

$$\ell_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{1}{2}, 0]$$

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0, 2]$$

$$\ell_3 : \quad y^2 = 4(1 - 4x^2), \qquad x \in [-\tfrac{1}{2}, 0]$$

Abbiamo

$$f\big|_{\ell_1} = \ln(t^2+t+1) = g_1(t)$$

$$g_1' = \frac{2t+1}{t^2+t+1} \geq 0 \quad \text{in } \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

Quindi g_1 è crescente in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ e

$$m_1 = g_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{4} < 0$$

$$M_1 = g_1(0) = 0$$

$$f\big|_{\ell_2} = \ln(1+t^2) = g_2(t)$$

$$g_2' = \frac{2t}{1+t^2} \geq 0 \quad \text{in } [0, 2]$$

Quindi g_2 è crescente in $[0,2]$ e

$$m_2 = g_2(0) = 0$$

$$M_2 = g_2(2) = \ln 5 > 0.$$

Infine

$$f\big|_{\ell_3} = \ln(x^2 + 4(1-4x^2) + x + 1) = \ln(5 + x - 15x^2) = g_3(x)$$

$$g_3' = \frac{1 - 30x}{5 + x - 15x^2} > 0 \qquad \text{in } \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

Quindi g_3 è crescente in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ e

$$m_3 = g_3\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{4}, \qquad M_3 = g_3(0) = \ln 5$$

Dal confronto fra i valori trovati, concludiamo che $m_{ass} = \ln\frac{3}{4}$, $\quad M_{ass} = \ln 5$

Si può, in effetti, risolvere più rapidamente. Infatti, poiché $h(t) = \ln(t)$ è funzione crescente del suo argomento, è sufficiente studiare $h(x,y) = 1 + x + x^2 + y^2$ in K. Osserviamo, poi, che

$$h = 1 + x + x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + x + x^2 + y^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{3}{4}$$

Quindi le linee di livello di h sono circonferenze centrate in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Dunque, il punto di minimo di h è necessariamente $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, mentre il punto di massimo di h è $(2,0)$, ossia il punto di K più lontano da $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.