(1) $f = x^3 - y^2$

<u>CN</u> $\nabla f = 0$ $\qquad \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies O(0,0)$

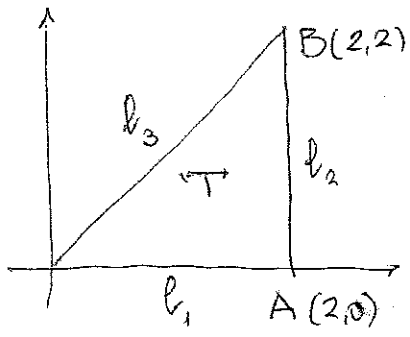
C.S $\quad H_f = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

La forma quadratica delle derivate seconde è <u>semidefinita</u> negativa.
Tuttavia

$f|_{y=0} = x^3$ e il punto $x=0$ è di flesso

$f|_{x=0} = -y^2$ e il punto $y=0$ è di max

Quindi il punto $(0,0)$ è di colle.



I tre lati del triangolo sono

l_1 : $y = 0$ $\qquad 0 \le x \le 2$

l_2 : $x = 2$ $\qquad 0 \le y \le 2$

l_3 : $y = x$ $\qquad 0 \le x \le 2$

Abbiamo

$f|_{l_1} = x^3 \qquad M_1 = 8 \qquad m_1 = 0$

$f|_{l_2} = 8 - y^2 \qquad M_2 = 8 \qquad m_2 = 4$

$f|_{l_3} = x^3 - x^2 = g_3(x)$

$g_3' = 3x^2 - 2x \qquad g_3' \ge 0$ $\quad$ 0 $\quad$ 2/3 $\quad$ 2 $\quad$ + $\quad$ − $\quad$ +

$x = \frac{2}{3}$ è punto di minimo
Quindi $\qquad M_3 = 4 \qquad m_3 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$

$M_{ass} = 8 \qquad m_{ass} = -\frac{4}{27}$

---

(2)

$$y'' + 4y' + 8y = x + \sin 3x$$

$$z'' + 4z' + 8z = 0$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0$$

$$(\alpha + 2)^2 + 2^2 = 0$$

$$\alpha = -2 \pm 2i$$

$$y = e^{-2x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right] + Ax + B + C\sin 3x +$$
$$+ D \cos 3x$$

Dobbiamo determinare A, B, C, D. Consideriamo solo y_p

$$y_p^* = Ax + B + C\sin 3x + D\cos 3x$$

$$y_p' = A + 3C\cos 3x - 3D\sin 3x$$

$$y_p'' = -9C\sin 3x - 9D\cos 3x$$

Sostituendo nell' equazione

$$-9C\sin 3x - 9D\cos 3x$$
$$-12D\sin 3x + 12C\cos 3x + 4A$$
$$+8C\sin 3x + 8D\cos 3x + 8B + 8Ax =$$
$$\sin 3x + x$$

Quindi

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 4A + 8B = 0 \\ -C - 12D = 1 \\ 12C - D = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= 1/8 \\ B &= -\frac{1}{16} \\ C &= -\frac{1}{145} \\ D &= -\frac{12}{145} \end{aligned}$$

Quindi l'I.G. è dato da

$$y = e^{-2x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right] + \frac{x}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{145}\sin 3x + $$
$$- \frac{12}{145}\cos 3x$$

Inoltre

$$y' = -2e^{-2x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right] + e^{-2x}\left[-2C_1 \sin 2x + \right.$$
$$\left. + 2C_2 \cos 2x\right] + \frac{1}{8} - \frac{3}{145}\cos 3x + \frac{36}{145}\sin 3x$$

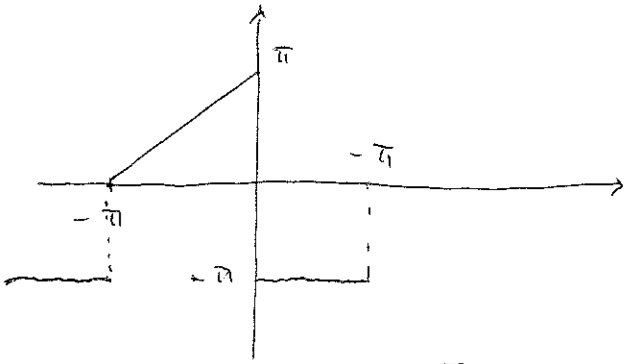
Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$, abbiamo

$$\begin{cases} C_1 - \frac{1}{16} - \frac{12}{145} = 0 \\ -2C_1 + 2C_2 + \frac{1}{8} - \frac{3}{145} = 0 \end{cases}$$

e da qui ricaviamo C_1 e C_2

---

(3)



La f è limitata, quindi è chiaramente sviluppabile in serie di Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)\,dt + \int_0^{\pi}(-\pi)\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{(\pi+t)^2}{2}\right|_{-\pi}^{0} - \pi^2\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \pi^2\right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)\cos nt\,dt + \int_0^{\pi}(-\pi)\cos nt\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\left.(\pi+t)\frac{\sin nt}{n}\right|_{-\pi}^{0}} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nt}{n} - \cancel{\left.\pi\frac{\sin nt}{n}\right|_0^{\pi}}\right]$$

$$= + \frac{1}{\pi} \left. \frac{\cos nt}{n^2} \right|_{-\pi}^{0} = \frac{1-(-)^n}{\pi \, n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (\pi + t) \sin nt + \int_{0}^{\pi} (-\pi) \sin nt \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-(\pi+t) \left. \frac{\cos nt}{n} \right|_{-\pi}^{0} + \cancel{\int_{-\pi}^{0} \frac{\cos nt}{n} \, dt} + \pi \left. \frac{\cos nt}{n} \right|_{0}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \left((-)^n - 1 \right) \right] = \frac{-2 + (-)^n}{n}$$

Dunque

$$f(t) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{\pi \, n^2} \cos nt + \frac{-2+(-)^n}{n} \sin nt$$

Per quanto riguarda la convergenza, osserviamo che

a) $\forall t \neq k\pi$ $\quad f$ è continua e derivabile, quindi $S(t) = f(t)$

b) $\forall t = 2k\pi$ $\quad f$ ha un salto finito e le pendenze ai due lati del salto sono finite. Quindi

$$S(2k\pi) = \frac{f(2k\pi^+) + f(2k\pi^-)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

c) $\forall t = (2k+1)\pi$ $\quad$ La situazione è la stessa del punto precedente

$$S((2k+1)\pi) = \frac{f((2k+1)\pi^+) + f((2k+1)\pi^-)}{2} = \frac{0-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

In particolare, scegliendo $t = 0$, dal punto b)

$$0 = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{\pi \, n^2}$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi (2k+1)^2}$$

Perciò

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$F = y'^2 + y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

L'equazione di Eulero - Lagrange è data da

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$2y - \frac{d}{dx} 2y' = 0$$

$$y'' - y = 0$$

$$\alpha^2 - 1 = 0 \qquad \alpha = \pm 1$$

Quindi

$$y = C_1 \operatorname{Ch} x + C_2 \operatorname{Sh} x$$

Imponendo le condizioni ai limiti

$$C_1 = 0$$

$$C_2 \operatorname{Sh} 1 = 1$$

Quindi l'estremale cercata è

$$y = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Sh} 1}.$$