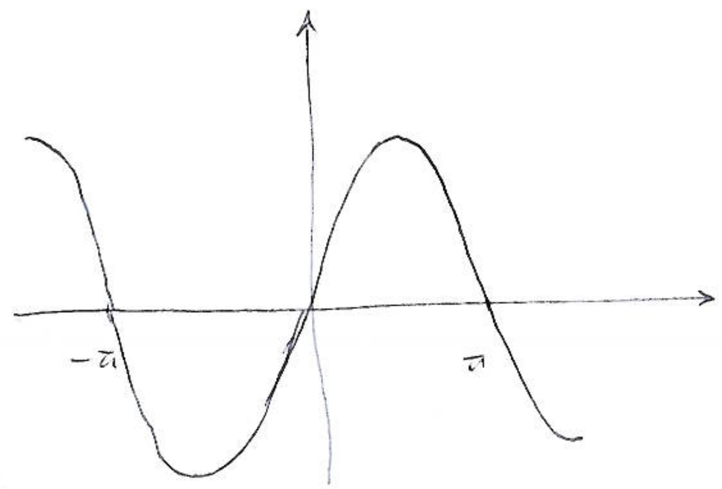
1) $f(t) = t(\pi^2 - t^2) \qquad t \in [-\pi, \pi)$

f 2π-periodica



È facile verificare che $f \in C^1(\mathbb{R})$: pertanto sicuramente $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$

e la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.

Poiché f è dispari, avremo $a_0 = a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t(\pi^2 - t^2) \sin nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\cancel{-t(\pi^2 - t^2) \frac{\cos nt}{n} \Big|_0^{\pi}} + \int_0^{\pi} (\pi^2 - 3t^2) \frac{\cos nt}{n} dt \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\cancel{(\pi^2 - 3t^2) \frac{\sin nt}{n^2} \Big|_0^{\pi}} + 6 \int_0^{\pi} t \frac{\sin nt}{n^2} dt \right]$$

$$= \frac{12}{\pi} \left[-t \frac{\cos nt}{n^3} \Big|_0^{\pi} + \cancel{\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n^3} dt} \right]$$

$$= -12 \frac{\cos n\pi}{n^3} = 12 \frac{(-)^{n+1}}{n^3}$$

Dunque

$$f(t) \sim 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n^3} \sin nt$$

La serie converge alla funzione nel senso dell'energia. Inoltre, poiché f è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$, la serie converge alla funzione puntualmente $\forall t \in \mathbb{R}$, ed uniformemente in $\mathbb{R}$.

Per l'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$2\int_0^{\pi} t^2 (\pi^2 - t^2)^2 dt = 144\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\int_0^{\pi} (\pi^4 t^2 - 2\pi^2 t^4 + t^6) dt = 72\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\pi^4 \frac{t^3}{3} - 2\pi^2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \Big|_0^{\pi} = 72\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\frac{\pi^7}{72\pi} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{2}{5} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\frac{\pi^6}{72} \; \frac{15 + 35 - 42}{105} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

Scegliamo, infine, $t = \frac{\pi}{2}$. Per quanto discusso sopra

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n^3} \sin n \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = 12 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{2k+1+1}}{(2k+1)^3} \sin (2k+1)\frac{\pi}{2} + \right.$$

$$\left. + \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^{2k+1}}{(2k)^3} \sin k\pi} \right]$$

$$\frac{3}{8} \frac{\pi^3}{12} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)^3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

2

$$y'' + 4y' + 8y = x^2 + \sin x$$

$$z'' + 4z' + 8z = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = -4$$

$$(\lambda + 2)^2 = -4$$

$$\lambda = -2 \pm 2i$$

$$z = e^{-2x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right] + y_p$$

Cerchiamo y_p nella forma

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + D\cos x + E\sin x$$

$$y_p' = 2Ax + B \quad D\sin x + E\cos x$$

$$y_p'' = 2A \quad - D\cos x - E\sin x$$

Sostituendo

$$\begin{array}{lllll} 2A & & & -D\cos x & - E\sin x \\ +4B & +8Ax & & +4E\cos x & -4D\sin x \\ +8C & +8Bx & +8Ax^2 & +8D\cos x & +8E\sin x \quad = \\ \hline & & x^2 & & +\sin x \end{array}$$

Quindi

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 8A + 8B = 0 \\ 2A + 4B + 8C = 0 \\ -E - 4D + 8E = 1 \\ -D + 4E + 8D = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A = 1/8 \\ B = -1/8 \\ C = \frac{1}{32} \\ D = -4/65 \\ E = \frac{7}{65} \end{array}$$

Perciò

$$y = e^{-2x}\left[C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x\right] + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} + $$
$$- \frac{4}{65}\cos x + \frac{7}{65}\sin x$$

$$y' = e^{-2x}\left[-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right] + $$
$$-2e^{-2x}\left[C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x\right] + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$
$$+ \frac{4}{65}\sin x + \frac{7}{65}\cos x$$

$$y(0) = C_1 + \frac{1}{32} - \frac{4}{65} = 1$$

$$y'(0) = 2C_2 - 2C_1 - \frac{1}{8} + \frac{7}{65} = 1$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 + \frac{4}{65} - \frac{1}{32} \\ C_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8} - \frac{7}{65} + 2C_1\right) \end{cases}$$

---

3) Consideriamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \ln(2x + y) - 4xy + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - 4\right)$$

La CN richiede che

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{2x+y} - 4y - \dfrac{\lambda}{x^2} = 0 \\ \dfrac{1}{2x+y} - 4x - \dfrac{2\lambda}{y^2} = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = x^2\left[\dfrac{2}{2x+y} - 4y\right] \\ \lambda = \dfrac{y^2}{2}\left[\dfrac{1}{2x+y} - 4x\right] \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x^2}{2x+y} - 4x^2y = \dfrac{y^2}{2(2x+y)} - 2xy^2 \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+y}\left(2x^2 - \dfrac{y^2}{2}\right) + 2xy^2 - 4x^2y = 0 \\ /// \\ /// \end{cases}$$

$$\frac{1}{2x+y}\left(\frac{4x^2 - y^2}{2}\right) + 2xy(y-2x) = 0$$

$$\frac{(2x-y)\cancel{(2x+y)}}{2\cancel{(2x+y)}} + 2xy(y-2x) = 0$$

$$(2x-y) - 4xy(2x-y) = 0$$

$$(2x-y)(1-4xy) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{2x} = 4 \\ \lambda = x^2\left[\dfrac{2}{2x+y} - 4y\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{x} + 8x = 4 \\ \lambda = x^2\left[\dfrac{2}{2x+y} - 4y\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \\ \lambda = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{4x} \\ \lambda = x^2\left[\dfrac{2}{2x+y} - 4y\right] \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile, per cui abbiamo l'unica soluzione $(\frac{1}{2}, 1)$ corrispondente a $\lambda = -\frac{3}{4}$.

Per verificare che il punto è di massimo vincolato, possiamo utilizzare la condizione sufficiente

Consideriamo, dunque, la matrice

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dove

$$[b_1, b_2] = \nabla g(\tfrac{1}{2}, 1)$$

e

$$\mathbb{A} = \mathbb{H}_f + \lambda_0 \mathbb{H}_g = \mathbb{H}_{\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{L}_{xx} = -\frac{4}{(2x+y)^2} + \frac{2\lambda}{x^3} \qquad \mathcal{L}_{xx}(\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{3}{4}) = -7$$

$$\mathcal{L}_{yy} = -\frac{1}{(2x+y)^2} + \frac{4\lambda}{y^3} \qquad \mathcal{L}_{yy}(\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{3}{4}) = -\frac{13}{4}$$

$$\mathcal{L}_{xy} = -\frac{2}{(2x+y)^2} - 4 \qquad \mathcal{L}_{xy}(\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{3}{4}) = -\frac{9}{2}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & -7 & -9/2 \\ -2 & -9/2 & -13/4 \end{bmatrix}$$

$$g_x = -\frac{1}{x^2} \qquad g_x(\tfrac{1}{2}, 1) = -4$$

$$g_y = -\frac{2}{y^2} \qquad g_y(\tfrac{1}{2}, 1) = -2$$

Poiché $\det \mathbb{B} > 0$ la condizione sufficiente è soddisfatta, e concludiamo che $(\frac{1}{2}, 1)$ è in effetti punto di massimo per f vincolato a $g = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - 4$.

$$f = x^2 \ln(1+x+y)$$

$$f_x = 2x \ln(1+x+y) + \frac{x^2}{1+x+y}$$

$$f_y = \frac{x^2}{1+x+y}$$

E' immediato verificare che f, f_x, f_y sono tutte continue in un intorno dell'origine. Per la C.S., dunque, f è differenziabile in $O(0,0)$.