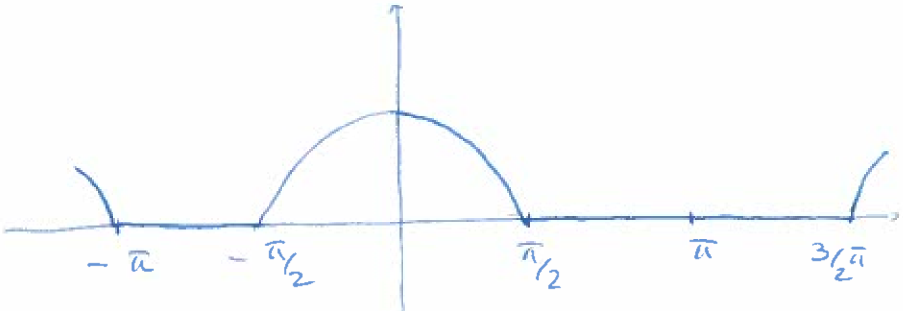
①

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi^2}t^2 & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, pari

a)



b) f è limitata e continua, pertanto $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$
e f è sviluppabile in serie di Fourier.

c) Poiché f è pari, avremo $S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{4}{\pi^2}t^2\right)dt = \frac{2}{\pi}\left[t - \frac{4}{3\pi^2}t^3\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\cancel{4}^{1}}{3\cancel{\pi^2}}\frac{\pi^{\cancel{3}}}{\cancel{8}_2}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi}\frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_3} = \frac{2}{3}$$

Quindi $\qquad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{3}$

Inoltre

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{4}{\pi^2}t^2\right)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\cancel{\left[\left(1-\frac{4}{\pi^2}t^2\right)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi/2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nt}{n}\,\frac{8}{\pi^2}t\,dt$$

$$= \frac{16}{\pi^3}\left[-t\,\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{16}{\pi^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos nt}{n^2}\,dt$$

$$= \frac{16}{\pi^3}\left(-\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos n\pi/2}{n^2}\right) + \frac{16}{\pi^3}\,\frac{\sin nt}{n^3}\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{8}{\pi^2}\,\frac{\cos n\pi/2}{n^2} + \frac{16}{\pi^3}\,\frac{\sin n\pi/2}{n^3}$$

$$= -\frac{8}{\pi^2}\underbrace{\frac{(-)^k}{4k^2}}_{k\geq 1} + \frac{16}{\pi^3}\underbrace{\frac{(-)^k}{(2k+1)^3}}_{k\geq 0}$$

Va inteso come scritto sotto

c) In definitiva

$$S(t) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{8}{\pi^2}\,\frac{(-)^k}{4k^2}\cos 2kt + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^3}\,\frac{(-)^k}{(2k+1)^3}\cos(2k+1)t$$

d) Poiché $f \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie converge alla f nel senso dell'energia.

Inoltre $\forall t^* \in \mathbb{R}$, f è continua in t^* e le derivate destra e sinistra sono finite. Pertanto, $\forall t^* \in \mathbb{R}$

$$f(t^*) = S(t^*)$$

e) In particolare, in $t=0$, abbiamo

$$\frac{1}{3} - \frac{8}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{16}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)^3} = 1$$

---

(2) Se consideriamo l'equazione omogenea associata, abbiamo

$$z'' + 9z = 0 \qquad \lambda^2 + 9 = 0 \qquad \lambda = \pm 3i$$

$$z = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Inoltre, posto

$$f = e^{3x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = f_1 + f_2$$

avremo

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + y_1 + y_2$$

Dalle tabelle ricaviamo che deve essere

$$y_1 = A e^{3x} \implies y_1' = 3A e^{3x}, \quad y_1'' = 9A e^{3x}$$

Perciò

$$9A e^{3x} + 9A e^{3x} = e^{3x}$$

$$18 A = 1 \implies A = 1/18$$

Quanto a y_2, essa deve essere ricavata dalla variazione delle costanti arbitrarie

$$y_2 = \int^x \frac{\begin{vmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ \cos 3x & \sin 3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -3\sin 3t & 3\cos 3t \end{vmatrix}} \frac{\cos 3t}{\sin 3t}\, dt =$$

$$= \int^x \frac{\cos 3t \sin 3x - \sin 3t \cos 3x}{3} \, \frac{\cos 3t}{\sin 3t} \, dt$$

$$= \left(\frac{1}{3}\int^x \frac{\cos^2 3t}{\sin 3t}\, dt\right) \sin 3x - \frac{\cos 3x}{3} \int^x \cos 3t \, dt$$

$$= -\frac{\sin 3x \cos 3x}{9} + \frac{1}{3} \sin 3x \left[\int^x \frac{1}{\sin 3t}\, dt - \int^x \sin 3t \, dt\right]$$

$$= \cancel{-\frac{\sin 3x \cos 3x}{9}} + \cancel{\frac{1}{9} \sin 3x \cos 3x} +$$

$$+ \frac{1}{3} \sin 3x \int^x \frac{\cos \frac{3}{2} t}{2 \sin \frac{3t}{2} \cos^2 \frac{3}{2} t} \, dt$$

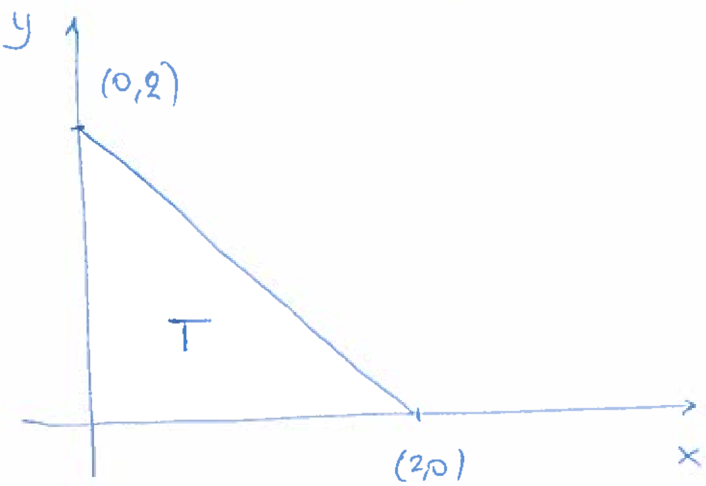
$$= \frac{1}{3} \sin 3x \left(\frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{3}{2} x \right| \right) = \frac{1}{9} \sin 3x \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{3}{2} x \right| \right]$$

Quindi concludiamo che l'integrale generale è

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{18} e^{3x} + \frac{1}{9} \sin 3x \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{3}{2} x \right| \right]$$

---

(3)



$$\nabla f = (\operatorname{Ch} x, \operatorname{Ch} y)$$

Osserviamo che ∇f non si annulla mai. Quindi, il massimo e il minimo assoluti sono assunti necessariamente su ∂T.

Osserviamo inoltre che

$$f(0,0) = 0$$

$$f\Big|_{[y=0,\ x\in[0,2]]} = \operatorname{Sh} x \quad \text{che è monotona crescente}$$

Quindi

$$m_1 = 0, \qquad M_1 = \operatorname{Sh} 2$$

Analogamente,

$$f\Big|_{[x=0,\ y\in[0,2]]} = \operatorname{Sh} y \quad \text{che è monotona crescente}$$

e

$$m_2 = 0, \qquad M_2 = \operatorname{Sh} 2$$

Consideriamo, ora

$$\ell_3 : \quad y = 2-x \qquad x\in[0,2]$$

Abbiamo

$$f\Big|_{\ell_3} = \operatorname{Sh} x + \operatorname{Sh}(2-x), \qquad x\in[0,2]$$

Posto

$$g(x) = \operatorname{Sh} x + \operatorname{Sh}(2-x)$$

abbiamo

$$g' = \operatorname{Ch} x - \operatorname{Ch}(2-x)$$
$$= \operatorname{Ch} x - \operatorname{Ch}(x-2)$$

$g' \geq 0$ $\qquad \operatorname{Ch} x - \operatorname{Ch}(x-2) \geq 0$

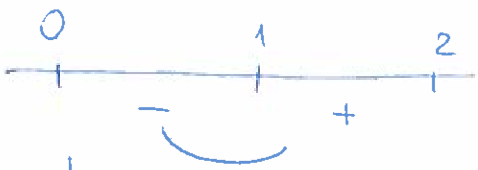
$$\operatorname{Ch} x \geq \operatorname{Ch}(x-2)$$

$$e^{x} + e^{-x} \geq e^{x-2} + e^{2-x}$$

$$e^{2x} + 1 \geq \frac{e^{2x}}{e^2} + e^2$$

$$e^{2x}\cancel{\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)} \geq e^2\cancel{\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)}$$

$$2x \geq 2 \qquad x \geq 1$$



e concludiamo che

$$m_3 = 2\operatorname{Sh} 1, \qquad M_3 = \operatorname{Sh} 2$$

Perciò

$$m = 0, \qquad M = \operatorname{Sh} 2$$

---

(4) $\quad e^{4xy} - (1-2x^2)y^2 = 0$

$f = e^{4xy} - (1-2x^2)y^2 \qquad \underline{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)}$

Inoltre

$f(0,-1) = e^0 - 1\cdot 1 = 0 \qquad f_x = 4y\, e^{4xy} + 4xy^2$

$f_x(0,-1) = -4 \neq 0$

Pertanto le ipotesi del Teorema di Dini sono tutte verificate e possiamo concludere che $\exists !\ g : I_{y=-1} \longrightarrow I_{x=0}$, di classe C^∞, t.c. $g(-1)=0$ e $f(g(y), y) \equiv 0$ $\forall\, y \in I_{y=-1}$

Inoltre

$$f_y = 4x e^{4xy} - 2y(1-2x^2)$$

$$f_y(0,-1) = 2$$

e concludiamo che $$g'(-1) = -\frac{f_y(0,-1)}{f_x(0,-1)} = -\frac{2}{-4} = 1/2$$

Per tracciare il grafico qualitativo, occorre conoscere $g''(-1)$

Abbiamo

$$e^{4y\,g(y)} - y^2(1-2g^2(y)) \equiv 0$$

$$e^{4y\,g(y)}\left[4g + 4yg'\right] - 2y(1-2g^2) + 4y^2 g g' \equiv 0$$

Posto $y=-1$ e $g(-1)=0$ riotteniamo

$$4 \cdot 0 - 4g'(-1) + 2 = 0 \implies g'(-1) = 1/2$$

Inoltre

$$e^{4y\,g(y)}\left[4g + 4yg'\right]^2 + e^{4y\,g(y)}\left[4g' + 4g' + 4yg''\right]$$
$$-2(1-2g^2) + 8ygg' + 8ygg' + 4y^2(g')^2 + 4y^2 gg'' \equiv 0$$

da cui

$$\left(-\cancel{4}^{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\right)^2 + \left(\cancel{4}^{2}\,\frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - 4g''\right) +$$

$$-2 + 4\,\frac{1}{4} = 0$$

$$2 + 4 + \cancel{2} - 4g'' \cancel{-2} + 1 = 0$$

$$4g''(-1) = 7 > 0$$

$$g''(-1) = \frac{7}{4}$$