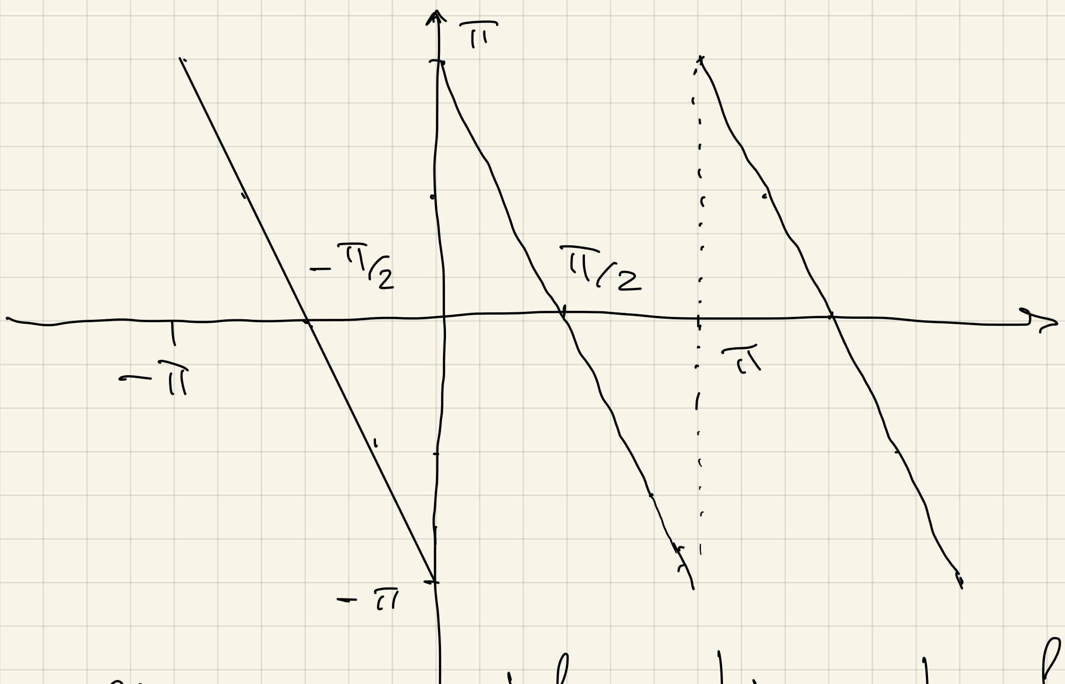
SOLUZIONI DELLO SCRITTO DEL 12/11/2020.

① $f = \pi - 2t \quad t \in (0, \pi)$, dispari, 2π - periodica

a)



Ci accorgiamo dal grafico che la funzione, in effetti, è π- periodica (e non solo 2π-periodica)

b) Poiché f è limitata e discontinua solo nei punti $t_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ e pertanto è sviluppabile in serie di Fourier

c) Per quanto detto in a) a proposito della periodicità, ed essendo f dispari, concludiamo che la serie di Fourier è del tipo

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi}{\pi} n t$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nt$$

dove

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin 2nt \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin 2nt \, dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi - 2t) \sin 2nt \, dt = \frac{4}{\pi} \left[(\pi - 2t)\left(-\frac{\cos 2nt}{2n}\right)\Big|_0^{\pi/2} \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/2} + \cancel{2} \left(+ \frac{\cos 2nt}{\cancel{2}n} \right) dt \right] = \frac{4}{\pi} \left[+ \pi \frac{1}{2n} - \frac{\sin \cancel{2}nt}{\cancel{2}n^2} \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{2}{n}$$

Pertanto

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin 2nt$$

d) Poiché $f \in L^2$, abbiamo che

$$f(t) \overset{E}{=} S(t)$$ (convergenza nel senso dell' energia)

Per quanto riguarda la convergenza puntuale,

1) $\forall t \notin n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, f è continua e derivabile e, dunque, $f(t) = S(t)$

2) $\forall t_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ f presenta un salto di ampiezza finita e le pendenze ai due lati del punto di salto sono finite. Pertanto, $S(t_n) = \frac{f(t_n^+) + f(t_n^-)}{2} = 0$.

e) Per quanto riguarda l'identità di Parseval, abbiamo

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$2 \int_{0}^{\pi/2} (\pi - 2t)^2 dt = \frac{\pi}{2} 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\cancel{2} \left[\frac{(\pi - 2t)^3}{3} \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \right) \right]_{0}^{\pi/2} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^3}{3} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e, in definitiva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(2) $\underline{z}' = A\underline{z}$ con $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

Calcoliamo gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} &\lambda^2 - 7\lambda + 10 - 18 = 0 \\ &\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0 \\ &(\lambda - 8)(\lambda + 1) = 0 \end{aligned}$$

Dunque, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -1$

Calcoliamo i corrispondenti autovettori.

Posto $\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, abbiamo $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$2\alpha - \beta = 0$ Possiamo, quindi, porre $\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Posto $\underline{h}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, abbiamo $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Da qui, $\alpha+\beta=0$ e possiamo porre $h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

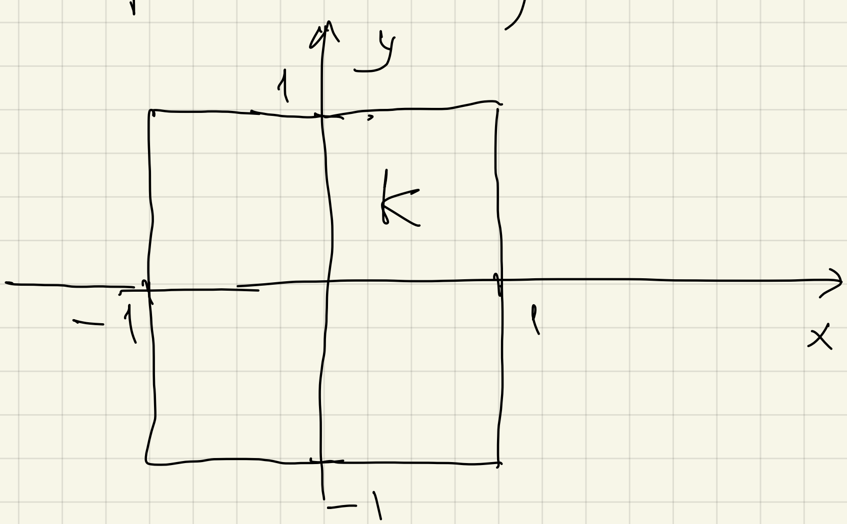
L'integrale generale, dunque, ha espressione

$$\underline{z} = c_1 e^{8x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{8x} & e^{-x} \\ 2e^{8x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

---

3. $f = 3x^3 + xy^2 - x$ $\qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$



Applichiamo la CN per studiare il comp. all'interno di K.

$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, ricaviamo che o $x=0$ o $y=0$.

Pertanto

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2-1=0 \end{cases} \implies A(0,1), \quad B(0,-1)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 9x^2-1=0 \end{cases} \implies C\left(\frac{1}{3},0\right), \quad D\left(-\frac{1}{3},0\right)$$

Osserviamo che i punti A e B si trovano sul bordo di K e vanno dunque per il momento tralasciati.

Passando alla CS, otteniamo che

$$H_f = \begin{bmatrix} 18x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \qquad H_f\left(\frac{1}{3},0\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} > 0$$

$\left(\frac{1}{3},0\right)$ è punto di minimo locale

$$H_f\left(-\frac{1}{3},0\right)=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}<0 \qquad \left(-\frac{1}{3},0\right) \text{ è punto di massimo locale}$$

$$f\left(\frac{1}{3},0\right)=\frac{3}{27}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}-\frac{3}{9}=-\frac{2}{9}=m_{int}$$

$$f\left(-\frac{1}{3},0\right)=-\frac{3}{27}+\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=M_{int.}$$

Passiamo, ora, al comportamento sul bordo, che è costituito dai segmenti:

$$l_1:\begin{cases}x=1\\ y\in[-1,1]\end{cases}, \qquad l_2:\begin{cases}y=1\\ x\in[-1,1]\end{cases},$$

$$l_3:\begin{cases}x=-1\\ y\in[-1,1]\end{cases}, \qquad l_4:\begin{cases}y=-1\\ x\in[-1,1]\end{cases}$$

Abbiamo

$$f|_{l_1}=y^2+2 \quad y\in[-1,1] \qquad m_1=2, \qquad M_1=3$$

$$f|_{\ell_2} = 3x^3 \qquad x \in [-1,1], \qquad m_2 = -3, \quad M_2 = 3$$

$$f|_{\ell_3} = -y^2 - 2 \qquad y \in [-1,1], \qquad m_3 = -3, \quad M_3 = -2$$

$$f|_{\ell_4} = 3x^3 \qquad x \in [1,1], \qquad m_4 = -3, \quad M_4 = 3$$

Quindi

$$\begin{aligned} M_{ass} &= \max\{M_{int}, M_1, M_2, M_3, M_4\} \\ &= \max\left\{\frac{2}{9}, 3, 3, -2, 3\right\} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{ass} &= \min\{m_{int}, m_1, m_2, m_3, m_4\} \\ &= \min\left\{-\frac{2}{9}, 2, -3, -3, -3\right\} = -3 \end{aligned}$$

---

(4) $$e^{x-y} - 1 + x^3 - \sin y^2 = 0$$

Posto

$$f = e^{x-y} - 1 + x^3 - \sin y^2 = 0$$

è immediato verificare che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Inoltre

$$f(0,0) = 1 - 1 = 0$$

$$f_y = -e^{x-y} - 2y\cos y^2, \quad f_y(0,0) = -1 \neq 0$$

Pertanto tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate e possiamo concludere che $f(x,y)=0$ è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno di $O(0,0)$

Posto $y = g(x)$, avremo $g : I_{x=0} \longrightarrow J_{y=0}$ ed anche

$$\forall x \in I_{x=0} \qquad f(x, g(x)) \equiv 0$$

Inoltre $f_x = e^{x-y} + 3x^2$. Pertanto

$$g'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Per tracciare il grafico qualitativo, abbiamo bisogno del valore di $g''(0)$.

Partiamo da $f(x, g(x)) = 0$, che per noi è

$$e^{x-g(x)} - 1 + x^3 - \sin[g(x)]^2 = 0$$

Derivando una volta, otteniamo

$$(1 - g'(x))\, e^{x-g(x)} + 3x^2 - \cos[g(x)]^2 \cdot 2g(x)g'(x) = 0$$

Derivando una seconda volta

$$(1-g'(x))^2 e^{x-g(x)} - g''(x)\, e^{x-g(x)} + 6x$$
$$+ \sin[g(x)]^2 (2g(x)g'(x))^2 - 2\cos[g(x)]^2 (g'(x))^2 +$$

$$-2\cos[g(x)]^2 \cdot g(x) \cdot g''(x) = 0$$

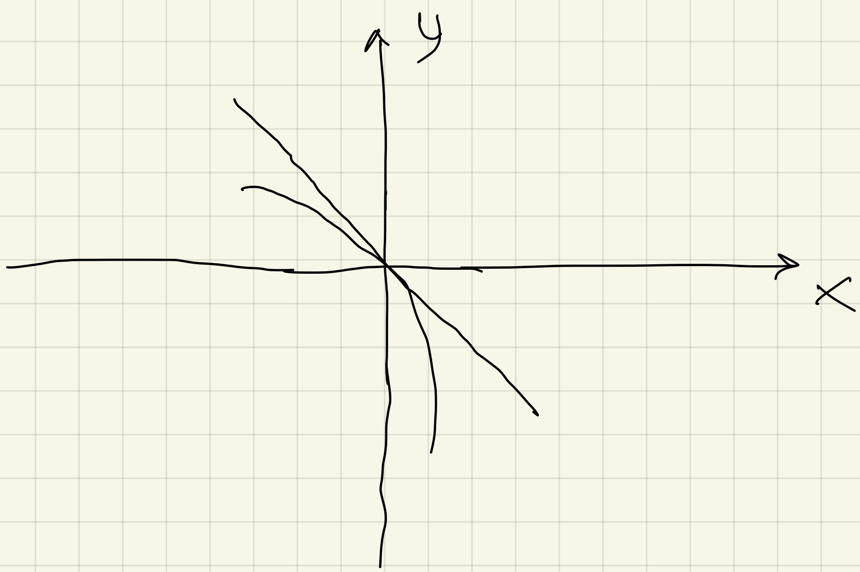
Sostituendo $x = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, abbiamo

$$-g''(0) - 2 = 0$$

ossia

$$g''(0) = -2$$

Il grafico qualitativo di g è indicato sotto in figure



(5) Il funzionale è

$$J(y) = \int_0^{\ln 2} \left[2y - e^x \left(y^2 + \frac{1}{2}(y')^2 \right) \right] dx$$

L'equazione di Eulero Lagrange

$$\frac{d}{dx}(f_{y'}) - f_y = 0$$

per noi diventa

$$\frac{d}{dx}\left[- e^x y' \right] - \left(2 - 2e^x y \right) \Big] = 0$$

ossia

$$- e^x y' - e^x y'' - 2 + 2e^x y = 0$$

$$e^x y'' + e^x y' - 2e^x y = -2$$

$$y'' + y' - 2y = -2e^{-x}$$

Se consideriamo l'equazione omogenea

$$z'' + z' - 2z = 0$$

abbiamo $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ $\quad (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 1$

Pertanto

$$y = c_1 e^{-2x} + c_1 e^{x} + y_p$$

Dalla natura del termine noto, ossia $-2e^{-x}$, ricaviamo che

$$y_p = Ae^{-x}$$

con A da determinare. Abbiamo

$y_p' = -Ae^{-x}$, $\quad y_p = Ae^{-x}$. Pertanto

$$\cancel{Ae^{-x}} - \cancel{Ae^{-x}} + \cancel{2}A\cancel{e^{-x}} = +\cancel{2}\cancel{e^{-x}} \implies A = 1$$

Dunque, l'integrale generale dell'equazione di Eulero-
- Lagrange è $\quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + e^{-x}$

Se imponiamo le condizioni agli estremi, ossia

$$y(0) = 2 \qquad y(\ln 2) = \frac{5}{2}$$

abbiamo

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 + 1 \\ \frac{5}{2} = c_1 e^{\ln 1/4} + c_2 e^{\ln 2} + e^{\ln 1/2} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{1}{4} c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \implies \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{matrix}$$

Pertanto l'estremale è $\quad y = e^{x} + e^{-x} = 2\,\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

ossia

$$y = 2\,\mathrm{Ch}\,x$$

Infine osserviamo che

$$f_y = 2 - 2e^x y \qquad \qquad f_{yy} = -2e^x \qquad f_{yy'} = 0$$
$$\Longrightarrow$$
$$f_{y'} = -e^x y' \qquad \qquad f_{y'y'} = -e^x$$

Quindi, la forma quadratica costruita con le derivate seconde rispetto a y e y' risulta $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$-2e^x \alpha^2 - e^x \beta^2 = -e^x (\alpha^2 + \beta^2)$$

Poiché $\forall x \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica è negativa $\forall \alpha, \beta$ che non siano contemporaneamente nulli, concludiamo per la CS che l'estremale $y = 2\,\mathrm{Ch}\,x$ è un estremante di massimo.