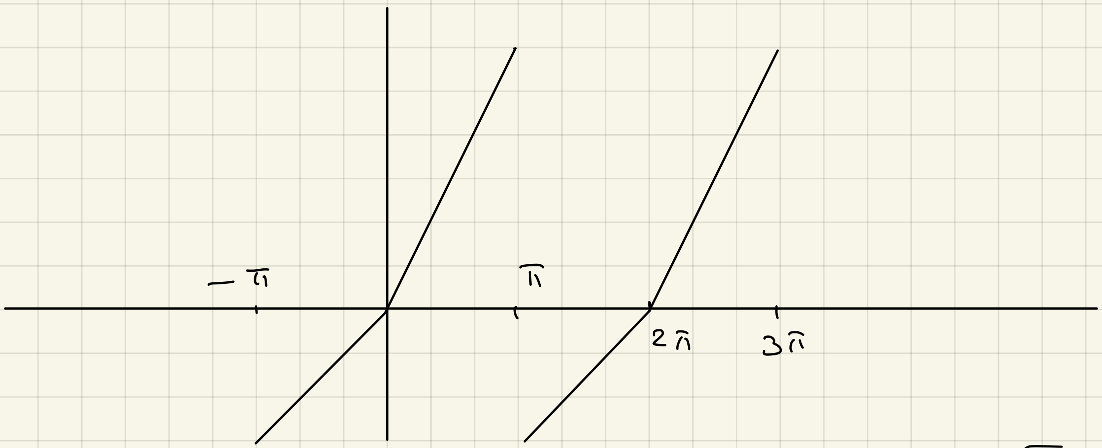
① $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, 2π - periodica, $f(t)=\begin{cases} t & t\in(-\pi,0] \\ 2t & t\in(0,\pi] \end{cases}$



La funzione è limitata, quindi sicuramente $f\in L^2(-\pi,\pi)$.
Inoltre

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\pi}^{0} t^2\,dt + \int_0^{\pi} 4t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{4}{3}t^3\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \frac{4}{3}\pi^3 = \frac{5}{3}\pi^3$$

Passando al calcolo dei coefficienti dello sviluppo di Fourier, abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right] = \frac{\pi}{2} \implies \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} t\cos nt\,dt + \int_{0}^{\pi} 2t\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0}} - \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nt}{n}\,dt + \cancel{2t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_{0}^{\pi}} + \right.$$

$$\left. - 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin nt}{n}\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + 2\,\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-)^n}{n^2} + 2\,\frac{(-)^n - 1}{n^2}\right] = \frac{(-)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} t\sin nt\,dt + \int_{0}^{\pi} 2t\sin nt\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \cancel{\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nt}{n}\,dt} - 2t\,\frac{\cos nt}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + 2\cancel{\int_{0}^{\pi}\frac{\cos nt}{n}}\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi(-)^n}{n} - \frac{2\pi(-)^n}{n}\right]$$

$$= \frac{3(-)^{n+1}}{n}$$

Pertanto

$$S(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{\pi n^2} \cos nt + \frac{3(-)^{n+1}}{n} \sin nt$$

Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, certamente la serie converge alla funzione nel senso dell'energia, ossia, posto

$$S_N(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-)^n - 1}{\pi n^2} \cos nt + \frac{3(-)^{n+1}}{n} \sin nt,$$

abbiamo

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0.$$

Passando alla convergenza puntuale,

$\forall\, t \neq k\pi$, f è continua e derivabile in t e quindi

$$S(t) = f(t)$$

Per $t_{2k} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f è continua in t_{2k} e le derivate destra e sinistra sono diverse ma finite. Pertanto

$$S(t_{2k}) = f(t_{2k})$$

Per $t_{2k+1} = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f ha un salto di ampiezza finita e le pendenze ai due lati del salto sono finite. Pertanto

$$S(t_{2k+1}) = \frac{f(t_{2k+1}^{+}) + f(t_{2k+1}^{-})}{2}$$

$$= \frac{-\pi + 2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

La serie <u>non</u> converge uniformemente in $[-\pi, \pi]$, perchè f non è continua.

Se ci poniamo in $t=\pi$, per quanto appena detto, abbiamo

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{\pi n^2} (-)^n$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$$

Poiché $1-(-)^n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 2k+1 \\ 0 & \text{se } n = 2k \end{cases}$

concludiamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Infine, per l'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right],$$

da cui otteniamo

$$\frac{5}{3}\pi^3 = \pi\left[\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-)^n-1}{\pi n^2}\right)^2 + \frac{9}{n^2}\right]$$

$$\left(\frac{5}{3}\pi^3 - \frac{\pi^3}{8}\right)\frac{1}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2}$$

---

② $y' = \mathbb{A}y + b \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} x^{-6}e^{-3x} \\ 0 \end{bmatrix}$

Determiniamo gli autovalori di $\mathbb{A}$. Abbiamo

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda+5 & 4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 + 6\lambda + 5 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \qquad (\lambda+3)^2 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

Poiché -3 è autovalore doppio, l'integrale generale del sistema omogeneo associato $z' = \mathbb{A}z$ è

$$\underline{z} = e^{-3x}\,\underline{c}_1 + x e^{-3x}\,\underline{c}_2$$

dove $\underline{c}_1$ e $\underline{c}_2$ sono due opportuni vettori che globalmente dipendono da due costanti arbitrarie. Imponendo che $\underline{z}$ sia soluzione, abbiamo

$$-3e^{-3x}\,\underline{c}_1 + \left(e^{-3x} - 3xe^{-3x}\right)\underline{c}_2 = e^{-3x}\,\mathbb{A}\,\underline{c}_1 + xe^{-3x}\,\mathbb{A}\,\underline{c}_2$$

Eguagliando membro a membro, deve essere

$$\begin{cases} \mathbb{A}\,\underline{c}_2 = -3\,\underline{c}_2 \\ \mathbb{A}\,\underline{c}_1 = -3\,\underline{c}_1 + \underline{c}_2 \end{cases}$$

Posto $\underline{c}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ abbiamo

$$\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha \\ -3\beta \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -5\alpha - 4\beta = -3\alpha \\ \alpha - \beta = -3\beta \end{cases}$$

Quindi
$$\begin{cases} -2\alpha - 4\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \implies \quad c_2 = \begin{bmatrix} -2L \\ L \end{bmatrix}$$

Posto $\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha \\ -3\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2L \\ L \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\alpha - 4\beta = -2L \\ \alpha + 2\beta = L \end{cases} \implies \quad \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} L-2M \\ M \end{bmatrix}$$

Pertanto ricaviamo

$$z = e^{-3x}\begin{bmatrix} L-2M \\ M \end{bmatrix} + xe^{-3x}\begin{bmatrix} -2L \\ L \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (e^{-3x} - 2xe^{-3x})L & -2e^{-3x}M \\ xe^{-3x}L & +e^{-3x}M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2x)e^{-3x} & -2e^{-3x} \\ xe^{-3x} & e^{-3x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}$$

Una matrice wronskiana fondamentale è quindi

$$Z = \begin{bmatrix} (1-2x)e^{-3x} & -2e^{-3x} \\ xe^{-3x} & e^{-3x} \end{bmatrix} \Longrightarrow W(x) = e^{-6x}(1-\cancel{2x}+\cancel{2x})$$
$$= e^{-6x}$$

Applicando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, un integrale particolare del sistema dato è

$$y_p = Z(x)\int Z^{-1}(x)\,\underline{b}(x)\,dx$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{W(x)}\begin{bmatrix} e^{-3x} & 2e^{-3x} \\ -xe^{-3x} & (1-2x)e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} & 2e^{3x} \\ -xe^{3x} & (1-2x)e^{3x} \end{bmatrix}$$

$$Z^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} e^{3x} & 2e^{3x} \\ -xe^{3x} & (1-2x)e^{3x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{-6}e^{-3x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-6} \\ -x^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\int \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{b}\, dx = \int \begin{bmatrix} x^{-6} \\ -x^{-5} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \dfrac{x^{-5}}{-5} \\ \dfrac{x^{-4}}{4} \end{bmatrix}$$

Concludiamo che

$$\underline{y}_p = \underline{\underline{Z}} \int \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{b}\, dx = \begin{bmatrix} (1-2x)e^{-3x} & -2e^{-3x} \\ x e^{-3x} & e^{-3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^{-5}/5 \\ x^{-4}/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\dfrac{2x-1}{5x^5} - \dfrac{1}{2x^4} \right) e^{-3x} \\ -\dfrac{1}{x^4} e^{-3x} + \dfrac{1}{4x^4} e^{-3x} \end{bmatrix}$$

L'integrale generale cercato è

$$\underline{y} = \underline{\underline{Z}}(x) \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} + \underline{y}_p$$

(3) $$y'' = 2y' \cot(2x) + 4\sin^2(2x)$$

Come suggerito, poniamo $y' = u$. Otteniamo

$$u' = 2u \cot(2x) + 4\sin^2(2x)$$

Da qui otteniamo

$$u = e^{\int 2\cot(2x)\,dx}\left[C + \int 4\sin^2(2x)\, e^{-2\int \cot(2x)\,dx}\,dx\right]$$

$$= e^{\int 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\,dx}\left[C + \int 4\sin^2(2x)\, e^{-\int \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\,dx}\,dx\right]$$

$$= e^{\ln|\sin 2x|}\left[C + \int 4\sin^2(2x)\, e^{-\ln|\sin 2x|}\,dx\right]$$

$$= |\sin 2x|\left[C + \int 4\,\frac{\sin^2(2x)}{\sin(2x)}\,dx\right]$$

Al solito, inglobando i segni nella costante arbitraria, abbiamo

$$u = \sin 2x \left[C + \int 4 \sin 2x \, dx \right]$$

$$= \sin 2x \left[C - 2 \cos 2x \right]$$

$$= C \sin 2x - \sin 4x$$

Quindi, ricordando che $u = y'$

$$y' = C \sin 2x - \sin 4x$$

$$y = -\frac{C}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x + D$$

Imponendo le condizioni iniziali,

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3 \iff -3 = C \sin \frac{\pi}{2} - \underbrace{\cancel{\sin \pi}}_{=0} \qquad C = -3$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff 1 = +\frac{3}{2} \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \cos \pi + D \qquad D = \frac{5}{4}$$

Concludiamo che l'integrale particolare cercato è

$$y = \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{5}{4}.$$

---

(4) $(1+x^2+y^2)z + z^3 + \lambda x^2 - \lambda y^2 + 4xy = 0.$

Se poniamo $f_\lambda = (1+x^2+y^2)z + z^3 + \lambda x^2 - \lambda y^2 + 4xy$

è evidente che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Inoltre

$$f_\lambda(1,-1,1) = 3 + 1 + \lambda - \lambda - 4 = 0$$

$$f_z = 1 + x^2 + y^2 + 3z^2 \qquad f_z(1,-1,1) = 6 \neq 0$$

Pertanto f è univocamente risolubile rispetto a z

in un intorno di P. Poiché

$$f_x = 2xz + 2\lambda x + 4y \qquad f_x(1,-1,1) = 2\lambda - 2$$

$f_y = 2yz - 2\lambda y + 4x \qquad f_y(1,-1,1) = 2\lambda + 2$

l'equazione del piano tangente è

$$(2\lambda-2)(x-1) + (2\lambda+2)(y+1) + 6(z-1) = 0$$

$$(\lambda-1)(x-1) + (\lambda+1)(y+1) + 3(z-1) = 0$$

E' perpendicolare a $\quad 2x+4y-z-3=0 \quad$ se

$\langle (2,4,-1), (\lambda-1, \lambda+1, 3) \rangle = 0, \quad$ ossia se

$$2\lambda - 2 + 4\lambda + 4 - 3 = 0$$

$$6\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda = 1/6$$

---

(5) $f = (x^2-y^2)^2 + 2z^2 \qquad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 9\}$

Poiché E è un insieme chiuso e limitato e f è continua su tale insieme, il massimo e il minimo cercati esistono sicuramente.

Applichiamo la CN per i punti di max e min interni.

$$\nabla f = 0 \qquad \begin{cases} 2(x^2-y^2)\cdot 2x = 0 \\ 2(x^2-y^2)(-2y) = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2-y^2) = 0 \\ y(x^2-y^2) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni si ottengono dai sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2-y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2 = 0 \\ x^2-y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi abbiamo

$$O(0,0,0) \qquad P_h = (h, \pm h, 0) \qquad h \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che in corrispondenza di questi punti, risulta $\quad f=0.$

Poiché $f \geq 0$ e $O, P_h \in E$, concludiamo che il minimo assoluto di f in E è $m=0$.

Passiamo a studiare il comportamento sul bordo.

Osserviamo che

$$\partial E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z^2 = 9 - x^2 - y^2, \quad x^2+y^2 \leq 9 \}$$

Ci riduciamo, quindi, a cercare il massimo assoluto di

$$g = (x^2-y^2)^2 + 2(9-x^2-y^2)$$

in $\quad K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \leq 9 \}$

Ancora, applichiamo la CN per determinare i punti critici all'interno.

$$\nabla g = 0 \qquad \begin{cases} 2(x^2-y^2)2x - 4x = 0 \\ -2(x^2-y^2)2y - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x(x^2-y^2-1) = 0 \\ 4y(x^2-y^2+1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2-1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2-y^2+1 = 0 \end{cases} \quad \cancel{\begin{cases} x^2-y^2-1 = 0 \\ x^2-y^2+1 = 0 \end{cases}}$$

Quindi

$$(0,0), \quad (\pm 1, 0), \quad (0, \pm 1)$$

Evitiamo di applicare la condizione sufficiente. Osserviamo che

$$g(0,0) = 18$$

$$g(\pm 1, 0) = 1 + 18 - 2 = 17$$

$$g(0, \pm 1) = 1 + 18 - 2 = 17$$

Infine, studiamo il comportamento sul bordo di K.

Osserviamo che possiamo parametrizzare, ossia

$$\partial K: \begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Corrispondentemente,

$$g\Big|_{\partial K} = (9\cos^2\theta - 9\sin^2\theta)^2 \cancel{+2(9 - 9\sin^2\theta - 9\cos^2\theta)}$$

$$= 81(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = 81(\cos 2\theta)^2$$

È immediato osservare che se

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi \qquad g = 81$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \qquad g = 0.$$

Pertanto, il massimo assoluto cercato è $M = 81$.