APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 7 FEBBRAIO 2012

COGNOME e NOME   NUMERO DI MATRICOLA

1) Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = 9(x-1)^2 + 4(y-1)^2$$

nell'insieme compatto

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad x \geq y^3, \; y \geq x^3\}.$$

2) Verificare che l'equazione

$$(x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 - 2z^3 + x^2y^2 = 0$$

è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno del punto $P = (0,0,1)$. Scrivere, quindi, l'equazione del piano tangente alla superficie così definita nel punto P.

3) Determinare autovalori ed autosoluzioni del Problema ai limiti omogeneo

$$\begin{cases} z'' + 9\lambda^2 z = 0, & \underline{\lambda > 0} \\ z(0) = 0, \\ z'(\frac{\pi}{3}) = 0. \end{cases}$$

4) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2t & t \in (-\pi, 0] \\ 4t & t \in (0, \pi]. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico della f.
b) Verificare che f è sviluppabile in serie di Fourier.
c) Scrivere tale sviluppo.
d) Studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier così ottenuta.
e) Utilizzare i risultati del punto precedente per calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

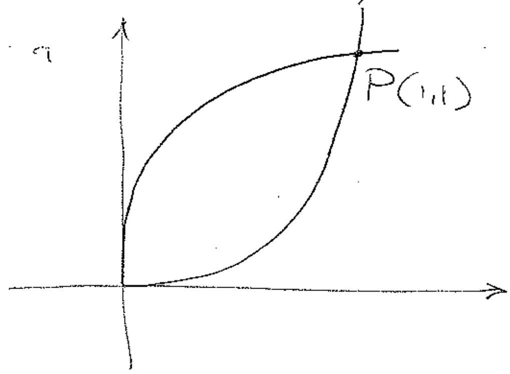
$f = 9(x-1)^2 + 4(y-1)^2$

$\nabla f = 0 \qquad \begin{array}{l} 18(x-1) = 0 \\ 8(y-1) = 0 \end{array} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$H_f = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} > 0 \qquad (1,1)$ è punto di minimo

Inoltre $\begin{array}{l} f(1,1) = 0 \\ f(x,y) \geq 0 \end{array} \Longrightarrow (1,1)$ è punto di minimo assoluto.

$(1,1)$ non è interno a D, ma appartiene a ∂D



Guardiamo al bordo

$\partial D = \ell_1 \cup \ell_2$

$\ell_1 : \begin{cases} x = y^3 \\ y \in [0,1] \end{cases}$

$\ell_2 : \begin{cases} y = x^3 \\ x \in [0,1] \end{cases}$

$f\big|_{\ell_1} = 9(y^3-1)^2 + 4(y-1)^2$

$= 9(y-1)^2(y^2+y+1)^2 + 4(y-1)^2$

$g_1 = (y-1)^2\left[9(y^2+y+1)^2 + 4\right]$

$g_1' = 2(y-1)\left[\qquad\qquad\right] + (y-1)^2\left[18(y^2+y+1)(2y+1)\right]$

$= (y-1)\underbrace{\left[18(y^2+y+1)^2 + 8 + 18(y-1)(y^2+y+1)(2y+1)\right]}$

$= (y-1)\left[18(y^2+y+1)(y^2 \cancel{+y+1} + 2y^2 \cancel{-y-1}) + 8\right]$

$= (y-1)\left[18(y^2+y+1)(3y^2) + 8\right]$

$\forall y \in [0,1] \quad g_1' \leq 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}$ è punto di max

$$f(0,0) = 13$$

$$f|_{\ell_2} = 9(x-1)^2 + 4(x^3-1)^2$$
$$= 9(x-1)^2 + 4(x-1)^2(x^2+x+1)^2$$
$$g_2 = (x-1)^2\left[4(x^2+x+1)^2 + 9\right]$$

$$g_2' = 2(x-1)\left[\cancel{4(x^2+x+1)^2 + 9}\right] + (x-1)^2\left[8(x^2+x+1)(2x+1)\right]$$
$$= (x-1)\left[8(x^2+x+1)^2 + 18 + 8(x-1)(x^2+x+1)(2x+1)\right]$$
$$= (x-1)\left[8(x^2+x+1)(x^2+\cancel{x}+\cancel{1} + 2x^2-\cancel{x}-\cancel{1}) + 18\right]$$
$$= (x-1)\left[8(x^2+x+1)(3x^2) + 18\right]$$

$\forall x \in [0,1]$ $\quad g_2' \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ è punto di max

---

$$f = (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 - 2z^3 + x^2y^2$$
$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$
$$f_z = 2(x+z) + 2(y+z) - 6z^2$$
$$f(0,0,1) = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$f_z(0,0,1) = 2 + 2 - 6 = -2$$

$f_x = 2(x+y) + 2(x+z) + 2xy^2 \qquad f_x(0,0,1) = 2$

$f_y = 2(x+y) + 2(y+z) + 2xy^2 \qquad f_y(0,0,1) = 2$

$$\cancel{2}x + \cancel{2}y - \cancel{2}(z-1) = 0$$
$$x + y - z + 1 = 0.$$

$$z'' + 9\lambda^2 z = 0$$

$$\alpha^2 + 9\lambda^2 = 0$$

$$\alpha = \pm 3i\lambda$$

$$z = C_1 \cos 3\lambda x + C_2 \sin 3\lambda x$$

$$z' = -3\lambda C_1 \sin 3\lambda x + 3\lambda C_2 \cos 3\lambda x$$

$z(0) = 0$

$z'(\frac{\pi}{3}) = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -3\lambda C_1 \sin \lambda\pi + 3\lambda C_2 \cos \lambda\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = 3\lambda \cos\lambda\pi$$

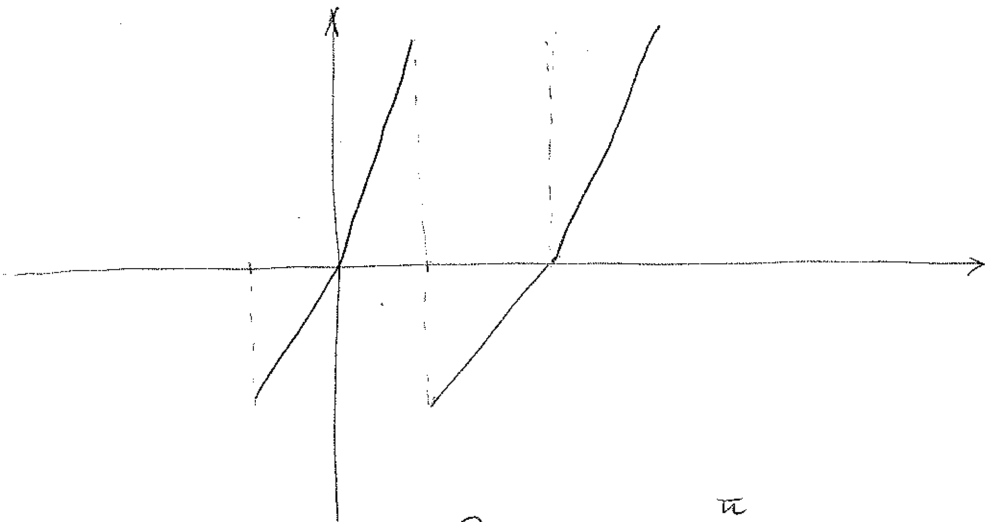
Se $\cos \lambda\pi \neq 0$ $\quad \lambda \neq \frac{1}{2} + k \quad k \geq 0$

$\Delta(\lambda) \neq 0$ e l'unica soluzione è la soluzione nulla.

Se $\lambda = \frac{1}{2} + k, \quad k \geq 0 \quad \Delta(\lambda) = 0.$

Le autosoluzioni corrispondenti sono

$$z = C_2 \sin 3\left(\frac{2k+1}{2}\right) x$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{0} 4t^2 dt + \int_{0}^{\pi} 16t^2 = 4\frac{t^3}{3}\Big|_{-\pi}^{0} + 16\frac{t^3}{3}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= 4\frac{\pi^3}{3} + 16\frac{\pi^3}{3} = \frac{20}{3}\pi^3 < +\infty$$

Quindi f è sviluppabile

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2t + \int_0^{\pi} 4t\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left. t^2\right|_{-\pi}^{0} + \left. 2t^2\right|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\pi^2 + 2\pi^2\right] = \pi$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2t\cos nt + \int_0^{\pi} 4t\cos nt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\left. 2t\,\frac{\sin nt}{n}\right|_{-\pi}^{0}} - 2\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nt}{n} + \cancel{\left. 4t\,\frac{\sin nt}{n}\right|_0^{\pi}}\right.$$

$$\left. - 4\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\right] = \frac{1}{\pi}\left[2\left.\frac{\cos nt}{n^2}\right|_{-\pi}^{0} + 4\left.\frac{\cos nt}{n^2}\right|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\,\frac{1-(-)^n}{n^2} + 4\,\frac{(-)^n - 1}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-)^n - 1\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2t\sin nt + \int_0^{\pi} 4t\sin nt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-2t\left.\frac{\cos nt}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \cancel{2\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nt}{n}} - 4t\left.\frac{\cos nt}{n}\right|_0^{\pi} + \cancel{4\int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{n}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[+2(-\pi)\frac{(-)^n}{n} - 4\pi\frac{(-)^n}{n}\right] = -\frac{6\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\,\frac{(-)^n}{n} = \frac{6(-)^{n+1}}{n}$$

$$S(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left[(-)^n - 1\right]\cos nt + \frac{6(-)^{n+1}}{n}\sin nt$$

$\forall t \neq (2k+1)\pi \qquad S(t) = f(t)$

$\forall t = (2k+1)\pi \qquad S((2k+1)\pi) = \frac{4\pi - 2\pi}{2} = \pi$

Infine, scegliendo $t = 0$

$$0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{n^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$