① $\mathcal{L} = \dfrac{x-y}{x+y} + \lambda\,(xy - x + y - 4)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y-x+y}{(x+y)^2} + \lambda\,(y-1) = 0 \\[2ex] \dfrac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} + \lambda\,(x+1) = 0 \\[2ex] xy - x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{(x+y)^2} = \lambda\,(1-y) \\[2ex] \dfrac{2x}{(x+y)^2} = \lambda\,(x+1) \\[2ex] xy - x + y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2y}{1-y} = \dfrac{2x}{x+1} \\[2ex] \dfrac{2x}{(x+y)^2} = \lambda\,(x+1) \\[2ex] xy - x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy + 2y = 2x - 2xy \\[1ex] \dfrac{2x}{(x+y)^2} = \lambda\,(x+1) \\[2ex] xy - x + y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = \dfrac{x-y}{2} \\[2ex] xy = x - y + 4 \\[1ex] \dfrac{2x}{(x+y)^2} = \lambda\,(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2x - 2y + 8 \\[1ex] xy = \dfrac{x-y}{2} \\[2ex] \dfrac{2x}{(x+y)^2} = \lambda\,(x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 8 \\[1ex] 2x\,(x+8) = x - x - 8 \\[1ex] \dfrac{2x}{(x+y)^2} = \lambda\,(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 4 = 0 \\ y = x + 8 \\ \dfrac{2x}{(x+y)^2} = \lambda (x+1) \end{cases} \qquad \begin{aligned} & x = -4 \pm \sqrt{16-4} = -4 \pm 2\sqrt{3} \\ & y = 4 \pm 2\sqrt{3} \\ & \frac{2x}{(x+y)^2} = \lambda (x+1) \end{aligned}$$

Abbiamo, quindi, i due punti

$A(-4 + 2\sqrt{3},\ 4 + 2\sqrt{3},\ \lambda = -1/(12\sqrt{3})$

$B(-4 - 2\sqrt{3},\ 4 - 2\sqrt{3},\ \lambda = 1/(12\sqrt{3})$

Purtroppo, se uno considera la matrice delle derivate seconde rispetto a x e y della funzione $\mathcal{L} = f + \lambda g$, tale matrice è indefinita e la C.S. non si può applicare. Occorre ragionare diversamente per concludere.

A tale scopo può essere utile osservare che il vincolo

$$g = 0 \qquad xy - x + y - 4 = 0$$

si riscrive

$$y(x+1) = x + 4$$

ossia

$$y = \frac{x+4}{x+1}$$

Perciò

$$f(x,y)\Big|_{g=0} = \frac{x - \dfrac{x+4}{x+1}}{x + \dfrac{x+4}{x+1}}$$

Il problema si riduce, quindi a verificare se $x_1 = -4 + 2\sqrt{3}$ e $x_2 = -4 - 2\sqrt{3}$ sono massimi e/o minimi relativi liberi per

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 4}$$

Abbiamo

$$h'(x) = \frac{2x(x^2+2x+4) - (2x+2)(x^2-4)}{(x^2+2x+4)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + 8x + 4)}{(x^2+2x+4)^2}$$

$-4 - 2\sqrt{3}$ $\qquad$ $-4+2\sqrt{3}$

$+ \qquad - \qquad +$

Quindi B è punto di massimo e A è punto di minimo

---

(2) Si verifica facilmente che f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e quindi, in particolare, differenziabile. Dunque, dato un generico $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle$$

$$= \frac{4x_0}{1+2x_0^2+4y_0^4}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{16y_0^3}{1+2x_0^2+4y_0^4}\,\frac{1}{2}$$

(3) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + y_p$

$$y_p = \int^x \frac{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}} \frac{\cos t}{\sin t}\, dt$$

$$= \int^x \frac{\sin t \cos x - \sin x \cos t}{-1} \frac{\cos t}{\sin t}\, dt$$

$$= \sin x \int^x \frac{\cos^2 t}{\sin t}\, dt - \cos x \int^x \cos t\, dt$$

$$= -\cos x \sin x + \cancel{\sin x \int^x \frac{1 + \cos t/2}{2 \sin\frac{t}{2} \cos\frac{t}{2}}\, dt}$$

$$+ \sin x \int^x \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t}\, dt$$

$$= -\cos x \sin x + \sin x \int^x \frac{1}{\sin t}\, dt - \sin x \int \sin t\, dt$$

$$= -\cancel{\cos x \sin x} + \cancel{\sin x \cos x} + \sin x \int^x \frac{1}{\sin\frac{t}{2} \cos\frac{t}{2}} \frac{\cos t/2}{\cos t/2} \frac{dt}{2}$$

$$= \sin x \int^x \frac{\cos t/2}{\sin t/2} \frac{1}{\cos^2 t/2} \frac{dt}{2}$$

$$= \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

Quindi

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x + \frac{\sin x}{\sin x} + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

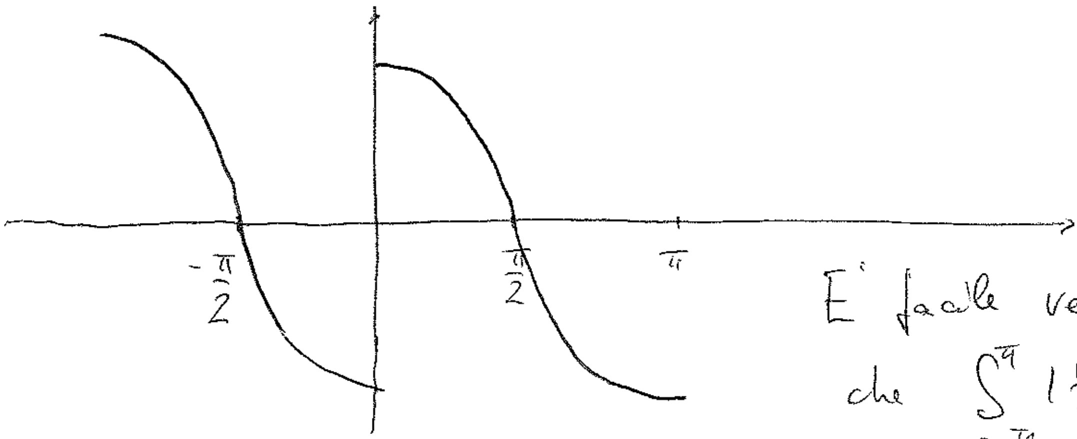
Imponendo le condizioni iniziali

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \begin{cases} 0 = C_1 + \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \\ 0 = -C_2 + 1 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases} \qquad y = \cos x + \sin x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| .$$

---

(4)



È facile vedere che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 < +\infty$, quindi f è sviluppabile

Poiché f è dispari, $a_0 = a_n = 0$

Inoltre

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \sin t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \sin nt\, dt$$

$$\int_0^{\pi} \cos t \sin nt\, dt = \sin nt \sin t \Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi} \cos nt \sin t$$

$$= n \cos t \cos nt \Big|_0^{\pi} + n^2 \int_0^{\pi} \cos t \sin nt$$

Dunque

$$(1-n^2)\int_0^{\pi} \cos t \sin nt\, dt = n \cos t \cos nt \Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \cos t \sin nt\, dt = -\frac{n}{n^2-1} \cos t \cos nt \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{n}{n^2-1}\left[-(-)^n - 1\right]$$

$$= \frac{n}{n^2-1}\left(1+(-)^n\right)$$

e

$$S(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}\left(1+(-)^n\right) \sin nt$$

$\forall\, t \neq k\pi$ $\quad S(t) = f(t)$, poichè f è continua e derivabile

$\forall\, t = k\pi$ $\quad S(t) = \dfrac{f(k\pi^+) + f(k\pi^-)}{2} = 0$, come è facile dedurre dal grafico.