① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, pari,

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad t \in [0, \pi/2) \\ \pi/2 & \text{se} \quad t \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

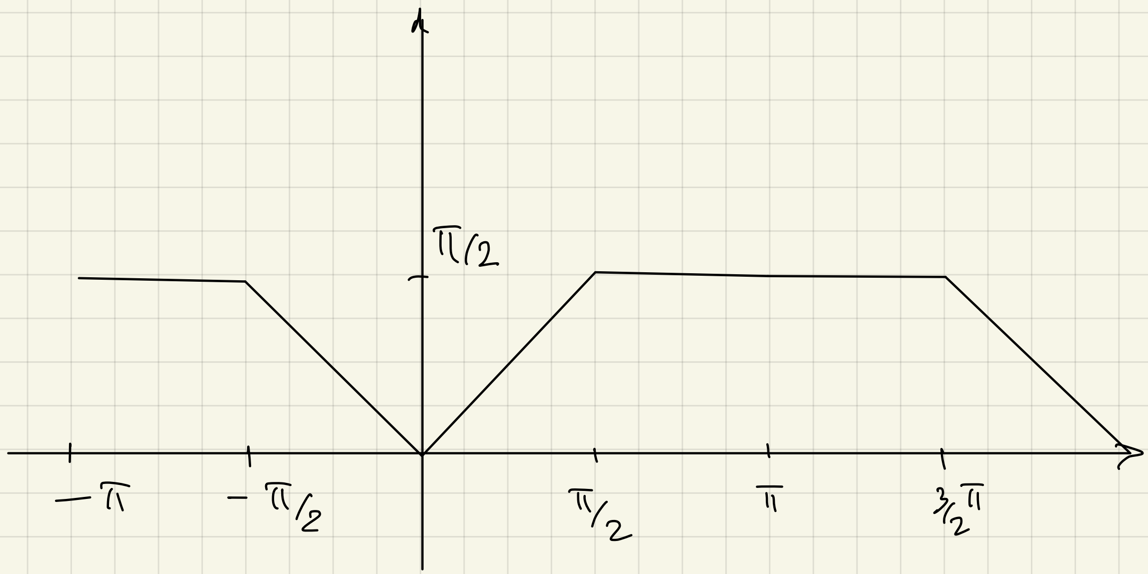


Grafico di f.

Poiché f è continua in tutto $\mathbb{R}$, è limitata e

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

Quindi è sicuramente sviluppabile in serie di Fourier.

Poiché f è <u>pari</u>, avremo

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\ \frac{3}{8}\pi^2 = \frac{3}{4}\pi \implies \frac{a_0}{2} = \frac{3}{8}\pi$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\cos nt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin nt}{n}\,dt + \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin n\pi/2}{n}} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\,dt + \cancel{\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin n\pi}{n}} + \right.$$
$$\left. - \cancel{\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin n\pi/2}{n}}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left. \frac{\cos nt}{n^2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\frac{\pi}{2} - 1}{n^2}$$

Pertanto

$$S(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2} - 1}{n^2} \cos nt$$

Passando alla convergenza, poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$ è immediato concludere che

$$f(t) \stackrel{E}{=} S(t)$$

ossia che

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0.$$

$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt$

Inoltre, $\forall t \in \mathbb{R}$ f è continua e derivabile, ad eccezione dei punti $t_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, dove comunque f

è continua e dotata di derivate destra e sinistra finite.
Pertanto, per il Teorema di convergenza puntuale, possiamo concludere che

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad S(t) = f(t).$$

Infine, f è di classe C^1 a tratti e ciò implica che abbiamo convergenza uniforme della serie di Fourier alla funzione in $[-\pi, \pi]$, ossia

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t) - S_N(t)| = 0.$$

Per quanto detto sopra, se scegliamo $t = \pi/2$, abbiamo $f(\pi/2) = S(\pi/2)$. Quindi

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2} - 1}{n^2} \cos n\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2} - 1}{n^2} \cos n\frac{\pi}{2}$$

E' evidente che se $n = 2k+1$ (ossia dispari)

$$\cos n\frac{\pi}{2} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$$

Quindi, ci riduciamo agli indici pari, ossia $n = 2k$.

Otteniamo

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi - 1}{4k^2} \cos(k\pi) \quad \left(\begin{array}{l} k \text{ parte da } 1, \\ \text{perché } n \text{ parte} \\ \text{da } 2 \end{array}\right)$$

cioè anche, moltiplicando e tenendo conto che $\cos k\pi = (-)^k$

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-)^k}{4k^2}$$

da cui

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-)^k}{k^2}$$

Se, poi, $k = 2\ell$ (pari), abbiamo $1-(-)^k = 0$.

Quindi, prendendo $k = 2\ell+1$ (dispari) otteniamo

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2}{(2\ell+1)^2}$$

(ℓ parte da 0, perchè $k = 2\ell+1$ parte da 1)

ossia, finalmente

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}$$

---

2 $\quad y' = \mathbb{A}y + b \qquad$ dove $\quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ xe^{3x} \end{bmatrix}$

Risolviamo prima il sistema omogeneo associato,

$$z' = A z$$

Abbiamo

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 3$$

Determiniamo i corrispondenti autovettori

$$h_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha + \beta = 0.$$

Possiamo prendere $\alpha = 1, \quad \beta = -1$

$$h_2 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma + 2\delta = 0$$

Possiamo prendere $\delta = 1, \quad \gamma = -2.$

Pertanto

$$\underline{z} = c_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2x} & -2e^{3x} \\ -e^{2x} & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

La matrice wronskiana fondamentale è

$$\mathbb{Z}(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} & -2e^{3x} \\ -e^{2x} & e^{3x} \end{bmatrix} \qquad W(x) = -e^{5x}$$

$$\mathbb{Z}^{-1} = -\frac{1}{e^{5x}} \begin{bmatrix} e^{3x} & +2e^{3x} \\ +e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2x} & -2e^{-2x} \\ -e^{-3x} & -e^{-3x} \end{bmatrix}$$

L'integrale generale del sistema completo è dato da

$$y = \mathbb{Z}\underline{c} + y_p$$

Determiniamo l'integrale particolare y_p con il Metodo delle Variazione delle Costanti Arbitrarie.

Avremo
$$y_p = \mathbb{Z}(x) \int^x \mathbb{Z}^{-1}(t)\, \underline{b}(t)\, dt$$

Pertanto
$$\mathbb{Z}^{-1}(x) \cdot \underline{b}(x) = \begin{bmatrix} -e^{-2x} & -2e^{-2x} \\ -e^{-3x} & -e^{-3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ xe^{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2xe^{x} \\ -x \end{bmatrix}$$

$$\int^x \mathbb{Z}^{-1}(t)\, \underline{b}(t)\, dt = \int^x \begin{bmatrix} -2te^{t} \\ -t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -2te^{t} + 2e^{t} \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}^x$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1-x)e^{x} \\ -\frac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

e infine

$$y_p = \underline{\underline{Z}}(x) \int^x \underline{\underline{Z}}^{-1}(t)\,\underline{b}(t)\,dt$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2x} & -2e^{3x} \\ -e^{2x} & +e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(1-x)e^{x} \\ -\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-2x+x^2)e^{3x} \\ (-2+2x-\frac{x^2}{2})e^{3x} \end{bmatrix}$$

Quindi, l'integrale generale del sistema dato è

$$y = \begin{bmatrix} e^{2x} & -2e^{3x} \\ -e^{2x} & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2-2x+x^2)e^{3x} \\ (-2+2x-\frac{x^2}{2})e^{3x} \end{bmatrix}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

---

(3) Usiamo il Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange.

Possiamo, peraltro, osservare che poiché il vincolo può essere riscritto come

$$x^2+y^2+z^2=25$$

la funzione f diventa

$$\tilde{f} = 25-x+2y+2z$$

e la Lagrangiana da considerare è allora

$$\mathcal{L} = 25-x+2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-25)$$

Dalla condizione necessaria, otteniamo

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ \mathcal{L}_z = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -1+2\lambda x = 0 \\ 2+2\lambda y = 0 \\ 2+2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-25=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \end{array}$$

Sostituendo nell' ultima equazione, otteniamo

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 25$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} = 25 \implies \lambda^2 = \frac{9}{100} \qquad \lambda = \pm \frac{3}{10}$$

Quindi

$$\lambda_1 = \frac{3}{10} \qquad x = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{10}} = \frac{5}{3}, \quad y = -\frac{10}{3}, \quad z = -\frac{10}{3}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{10} \qquad x = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{10}{3}, \quad z = \frac{10}{3}.$$

Poiché il vincolo è $S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \}$ che è la sfera di centro l'origine e raggio 5, si tratta di un insieme chiuso e limitato. Pertanto il massimo ed il minimo assoluti esistono sicuramente e sono determi_

nato semplicemente sostituendo in $\tilde{f} = 25 - x + 2y + 2z$.
Quindi

$$\tilde{f}\left(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right) = 25 - \frac{5}{3} - \frac{20}{3} - \frac{20}{3} = 25 - \frac{\cancel{45}^{15}}{\cancel{3}_1} = 10$$

$$\hat{f}\left(-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) = 25 + \frac{5}{3} + \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = 25 + 15 = 40.$$

Quindi

$$m_{ass} = 10$$

$$M_{ass} = 40$$

---

(4) $f(x,y) = y - x \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + x \ln(3\sqrt{e})$

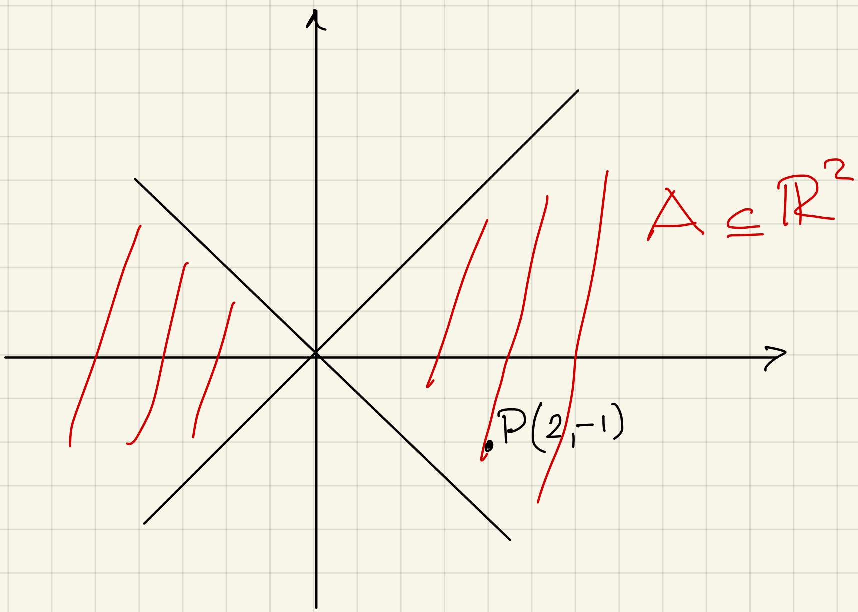
Si tratta di una funzione di classe C^∞ nel dominio $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definito da $\frac{x-y}{x+y} > 0$, ossia,

$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-y<0 \\ x+y<0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y<x \\ y>-x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y>x \\ y<-x \end{cases}$$

Si tratta del dominio tratteggiato in figura



Poiché $P(2,-1) \in A$, possiamo applicare il Teorema di Dini.

Osserviamo che, come detto sopra, $f \in C^\infty(A)$, quindi f_x e f_y sono certamente ben definite in A.

Abbiamo

$$f(2,-1) = -1 - 2\ln\left(\frac{2-(-1)}{2+(-1)}\right) + 2\ln(3\sqrt{e})$$

$$= -1 - 2\ln 3 + 2\ln 3 + 2\,\frac{1}{2}\ln e$$

$$= -1 - 2\ln 3 + 2\ln 3 + 1 = 0$$

Inoltre

$$f_x = -\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) - x\,\frac{\cancel{x+y}}{x-y}\cdot\frac{\cancel{x}+y-(\cancel{x}-y)}{(x+y)^{\cancel{2}}} + \ln(3\sqrt{e})$$

$$= -\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) - \frac{2xy}{x^2-y^2} + \ln 3 + \frac{1}{2}$$

$$f_x(2,-1) = -\cancel{\ln 3} - \frac{2\cdot 2(-1)}{4-1} + \cancel{\ln 3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} \neq 0$$

$$f_y = 1 - x\,\frac{\cancel{x+y}}{x-y}\cdot\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^{\cancel{2}}} = 1 + \frac{2x^2}{x^2-y^2}$$

$$f_y(2,-1) = 1 + \frac{2\cdot 4}{3} = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

In sintesi, poiché $f \in C^\infty(A)$, $f(P)=0$ e $f_x(P) \neq 0$, $f_y(P) \neq 0$, il Teorema di Dini garantisce che l'equazione $f(x,y)=0$ è univocamente risolubile sia rispetto a x, sia rispetto a y in un intorno di P.

Quanto alla retta tangente in P alla linea Γ, ha equazione

$$f_x(2,-1)(x-2) + f_y(2,-1)(y+1) = 0$$

ossia

$$\frac{11}{6}(x-2) + \frac{11}{3}(y+1) = 0$$

$$x - 2 + 2y + 2 = 0$$

$$x + 2y = 0.$$

(5) $$y'' + 12y' + 32y = \frac{1}{1+10e^{4x}}$$

Si tratta di una equazione lineare a coefficienti costanti completa. Poiché il termine noto è $f(x) = \frac{1}{1+10e^{4x}}$ e $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, dalla teoria ricaviamo immediatamente che anche l'integrale generale appartiene a $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Se consideriamo l'equazione caratteristica, abbiamo

$$\lambda^2 + 12\lambda + 32 = 0$$

$$(\lambda + 8)(\lambda + 4) = 0 \implies \lambda_1 = -8, \quad \lambda_2 = -4$$

Pertanto,

$$y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{-4x} + y_p$$

Anche in questo caso, determiniamo l'integrale generale usando il Metodo della Variazione delle Costanti Arbitrarie. Avremo

$$y_p = \int^x \frac{\begin{vmatrix} e^{-8t} & e^{-4t} \\ e^{-8x} & e^{-4x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-8t} & e^{-4t} \\ -8e^{-8t} & -4e^{-4t} \end{vmatrix}} \frac{1}{1+10e^{4t}} dt$$

$$= \int^x \frac{e^{-4x}e^{-8t} - e^{-8x}e^{-4t}}{-4e^{-12t}+8e^{-12t}} \frac{1}{1+10e^{4t}} dt$$

$$= \int^x \frac{e^{-4x}e^{-8t} - e^{-8x}e^{-4t}}{4e^{-12t}} \frac{1}{1+10e^{4t}} dt =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-4x} \int^x \frac{e^{4t}}{1+10e^{4t}} dt - \frac{1}{4} e^{-8x} \int^x \frac{e^{8t}}{1+10e^{4t}} dt$$

Risolviamo separatamente i due integrali. Abbiamo

$$\int^x \frac{e^{4t}}{1+10e^{4t}} dt = \frac{1}{40} \int^x \frac{40e^{4t}}{1+10e^{4t}} dt = \frac{1}{40} \ln(1+10e^{4x})$$

$$\int \frac{e^{8t}}{1+10e^{4t}} dt = \begin{pmatrix} e^{4t} = s \\ 4e^{4t} dt = ds \end{pmatrix} \frac{1}{4} \int \frac{s}{1+10s} ds$$

$$= \frac{1}{40} \int \frac{10s}{1+10s} ds = \frac{1}{40} \left[\int \frac{1+10s}{1+10s} ds - \int \frac{1}{1+10s} ds \right]$$

$$= \frac{1}{40} s - \frac{1}{400} \ln(1+10s)$$

Pertanto,

$$\int^x \frac{e^{8t}}{1+10e^{4t}}\,dt = \frac{1}{40}e^{4x} - \frac{1}{400}\ln(1+10e^{4x})$$

e concludiamo che

$$y_p = \frac{1}{4}e^{-4x}\,\frac{1}{40}\ln(1+10e^{4x}) - \frac{1}{4}e^{-8x}\Big(\frac{1}{40}e^{4x} +$$

$$- \frac{1}{400}\ln(1+10e^{4x})\Big) =$$

$$= \frac{1}{160}e^{-4x}\ln(1+10e^{4x}) - \frac{1}{160}e^{-4x} + \frac{1}{1600}e^{-8x}\ln(1+10e^{4x})$$

L'integrale generale è, allora

$$y = C_1e^{-8x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{160}e^{-4x}\ln(1+10e^{4x}) +$$

$$+ \frac{1}{1600}e^{-8x}\ln(1+10e^{4x}).$$

Osserviamo che il termine $-\frac{1}{160}e^{-4x}$ è già consi_ derato in $C_2 e^{-2x}$ e non serve, dunque, ripeterlo.