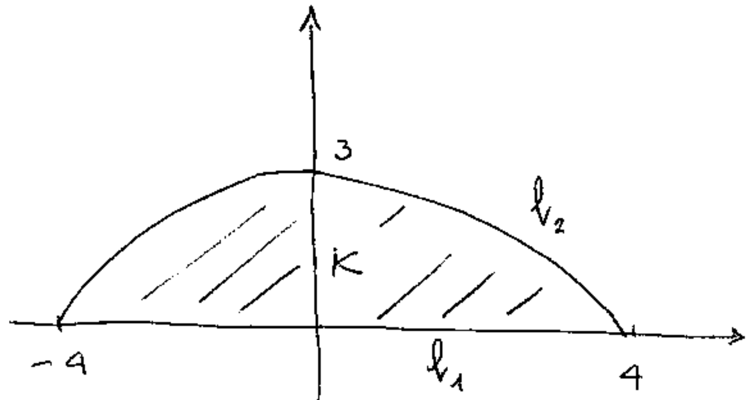
① $f(x,y) = \ln(1+x^2) + \ln(1+y^2)$
$= \ln[(1+x^2)(1+y^2)]$

Dal momento che il logaritmo è una funzione crescente del suo argomento, è sufficiente studiare il suo argomento

$$g(x,y) = (1+x^2)(1+y^2)$$



$$\nabla g = 0 \qquad \begin{cases} 2x(1+y^2) = 0 \\ 2y(1+x^2) = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $O(0,0)$ che tuttavia appartiene al bordo di K.

Peraltro, osserviamo che

$$g(x,y) \geq 1 \qquad \forall (x,y) \in K$$
$$g(0,0) = 1$$

Quindi $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per g e dunque anche per f. Inoltre

$$m = f(0,0) = \ln 1 + \ln 1 = 0.$$

Per quanto riguarda ∂K, è chiaro che

$$\partial K = \ell_1 \cup \ell_2$$

$$\ell_1 : \begin{cases} y = 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}, \qquad \ell_2 \begin{cases} y^2 = \dfrac{144 - 9x^2}{16} \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$g|_{\ell_1} = 1 + x^2$ $\qquad m_{1,g} = 1$ (assunto in $x = 0$)

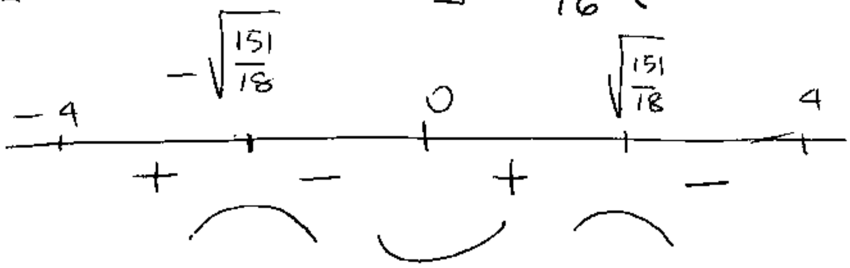
$\qquad M_{1,g} = 17$ (assunto in $x = \pm 4$)

Corrispondentemente $\quad M_{1,f} = \ln 17$ (assunto in $(4,0), (-4,0)$)

$$g|_{\ell_2} = (1+x^2)\left(1+\frac{144-9x^2}{16}\right) = \frac{(1+x^2)(160-9x^2)}{16} = h(x)$$

$$h'(x) = \frac{1}{16}\left[2x(160-9x^2) - 18x(1+x^2)\right]$$

$$= \frac{2x}{16}\left[160-9x^2-9-9x^2\right] = \frac{2x}{16}(151-18x^2)$$



Poiché $\quad h(0) = g(0,3) = 10 \quad$ e $\quad h(\pm 4) = g(\pm 4, 0) = 17$,

concludiamo che

$$m_{2,g} = g(0,3) = 10$$

$$M_{2,g} = g\left(\pm\sqrt{\frac{151}{18}}, \sqrt{\frac{137}{32}}\right) = \left(1+\frac{151}{18}\right)\left(1+\frac{137}{32}\right)$$

$$= \frac{169}{18}\cdot\frac{169}{32} = \left(\frac{169}{24}\right)^2$$

e dunque

$$m_f = 0 \qquad \text{assunto in } (0,0)$$

$$M_f = 2\ln\frac{169}{24} \qquad \text{assunto in } \left(\pm\sqrt{\frac{151}{18}}, \sqrt{\frac{137}{32}}\right)$$

---

② $f(x,y,z) = x^2 + xy^2 - (1+y)z^2 + e^{yz}$

È evidente che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial z} = -2z(1+y) + y e^{yz}$

Poiché

$$f(0,0,1) = 0 + 0 - 1 + 1 = 0$$

$$f_z(0,0,1) = -2 \neq 0$$

tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate e possiamo concludere che $\exists\, B_r(0,0)$, $J_{r'}(1)$ ed un'unica funzione

g di classe C^∞ con $g: B_r(0,0) \longrightarrow J_{r'}(1)$ t.c.

$$g(0,0) = 1$$
$$f(x,y,g(x,y)) \equiv 0 \qquad \forall\ (x,y) \in B_r(0,0)$$

Come detto, g è di classe C^∞ e possiamo, quindi, scrivere il suo polinomio di Mc-Laurin di ordine 2

$$P_2(x,y) = g(0,0) + g_x(0,0)x + g_y(0,0)y +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[g_{xx}(0,0)x^2 + 2g_{xy}(0,0)xy + g_{yy}(0,0)y^2\right]$$

Dobbiamo, dunque, calcolare le derivate prime e seconde di g nell'origine.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 + xy^2 - (1+y)g^2(x,y) + e^{yg(x,y)}\right] \equiv 0$$

$$2x + y^2 - 2(1+y)g\,g_x + y g_x e^{yg} \equiv 0$$

$$-2g_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g_x(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 + xy^2 - (1+y)g^2(x,y) + e^{yg(x,y)}\right] \equiv 0$$

$$2xy - g^2 - 2(1+y)g\,g_y + e^{yg}(g + y g_y) \equiv 0$$

$$-1 - 2g_y + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g_y(0,0) = 0$$

Poiché $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$, per il calcolo delle derivate seconde possiamo utilizzare le formule più semplici

$$g_{xx}(0,0) = -\frac{f_{xx}(0,0,1)}{f_z(0,0,1)} = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$g_{yy}(0,0) = -\frac{f_{yy}(0,0,1)}{f_z(0,0,1)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$g_{xy}(0,0) = -\frac{f_{xy}(0,0,1)}{f_z(0,0,1)} = 0$$

Perciò

$$P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)$$

---

(3)

$$z'' + 4z' + \lambda^2 z = 0$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + \lambda^2 = 0$$

$$\alpha = -2 \pm \sqrt{4 - \lambda^2}$$

$$= -2 \pm i\sqrt{\lambda^2 - 4}$$

dal momento che $\lambda > 2$

Perciò l'integrale generale ha l'espressione

$$z = e^{-2x}\left[C_1 \cos\sqrt{\lambda^2-4}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda^2-4}\,x\right]$$

$$z(0) = C_1$$

$$z(\pi) = e^{-2\pi}\left[C_1 \cos\sqrt{\lambda^2-4}\,\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda^2-4}\,\pi\right]$$

Quindi il Pb ai limiti omogeneo si riduce a risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda^2-4}\,\pi)C_1 + \sin(\sqrt{\lambda^2-4}\,\pi)C_2 = 0 \end{cases}$$

il cui determinante è $\Delta(\lambda) = \sin\sqrt{\lambda^2-4}\,\pi$.

Perciò se

$$\Delta(\lambda) \neq 0$$

abbiamo la soluzione banale (unica!) $C_1 = C_2 = 0$.

Se invece

$$\Delta(\lambda) = 0 \qquad \sin\sqrt{\lambda^2 - 4}\,\pi = 0$$

$$\sqrt{\lambda^2 - 4}\,\pi = k\pi \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\lambda^2 - 4 = k^2$$

$$\lambda^2 = k^2 + 4$$

allora $C_1 = 0$, C_2 arbitrario.

Gli autovalori sono allora

$$\lambda_k = \sqrt{k^2 + 4} \qquad k \in \mathbb{N}$$

e le corrispondenti autosoluzioni sono

$$z_k = C\, e^{-2x} \sin kx \qquad k \in \mathbb{N}.$$

---

(4) Poichē f ē una funzione razionale fratta ed il denominatore si annulla solo in $(0,0)$ ē chiaro che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$

Dobbiamo dunque controllare la regolarità nell'origine.

Per quanto riguarda la continuità, passando in coordinate polari, abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \sin^4\vartheta + \rho^6 \cos^6\vartheta}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \rho^2 \left[\rho^4 \cos^6 \vartheta + \sin^4 \vartheta \right] = 0 = f(0,0)$$

Quindi f è continua anche nell'origine.

Inoltre

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^6/h^2}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{k^4/k^2}{k} = 0$$

$$f_x(x,y) = \frac{6x^5(x^2+y^2) - 2x(x^6+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^7 + 6x^5y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^6+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^6y + 4x^2y^3 + 2y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

e, passando ancora in coordinate polari

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_x(x,y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{4\rho^7 \cos^7 \vartheta + 6\rho^7 \cos^5 \vartheta \sin^2 \vartheta - 2\rho^5 \cos \vartheta \sin^4 \vartheta}{\rho^4}$$

$$= 0 = f_x(0,0)$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_y(x,y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{-2\rho^7 \cos^6 \vartheta \sin \vartheta + 4\rho^5 \cos^2 \vartheta \sin^3 \vartheta + 2\rho^5 \sin^5 \vartheta}{\rho^4}$$

$$= 0 = f_y(0,0)$$

Dunque le derivate prime sono continue nell'origine e per la condizione sufficiente di differenziabilità possiamo concludere che f è differenziabile nell'origine.

Passando alle derivate seconde, abbiamo

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h^7}{h^4}}{h} = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_y(0,k) - f_y(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{2k^5/k^4}{k} = 2$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_{xx} = \frac{(28x^6 + 30x^4y^2 - 2y^4)(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2+y^2)}2x(4x^7+6x^5y^2-2xy^4)}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{28x^8 + 30x^6y^2 - 2x^2y^4 + 28x^6y^2 + 30x^4y^4 - 2y^6 - 16x^8 - 24x^6y^2 - 8x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

e passando in coordinate polari è immediato verificare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}$ non esiste.

Dunque possiamo concludere che f non è di classe C^2 in tutto $\mathbb{R}^2$.