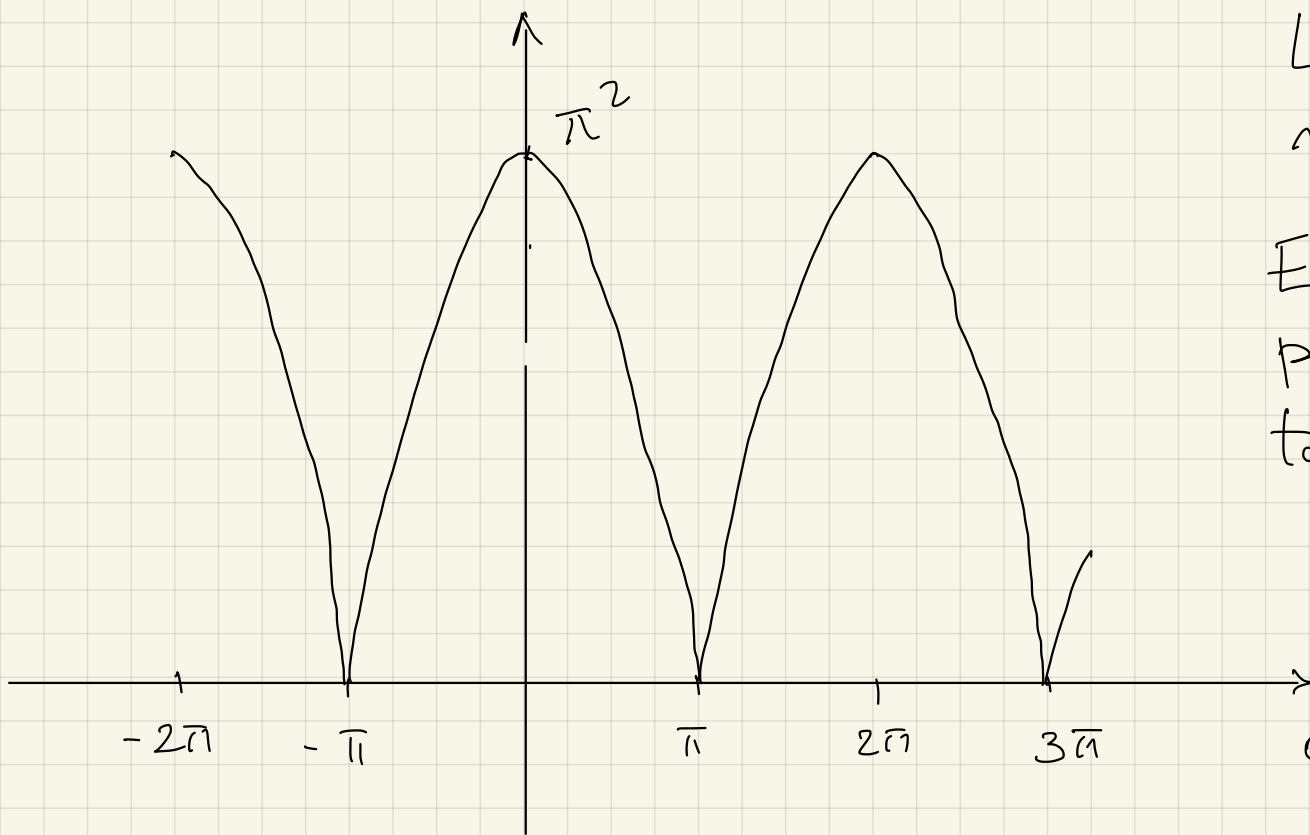


① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, $f(t) = \pi^2 - t^2$ quando
 $t \in [-\pi, \pi]$



La funzione è chiaramente pari.

È continua e limitata,
per cui possiamo certamente concludere che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty,$$

ossia f è sviluppabile
in serie di Fourier.

Inoltre, poiché f è pari, sarà $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$
e

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - t^2) dt = \frac{2}{\pi} \left[\pi^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi^2 \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2}{3} \pi^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - t^2) \cos nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\cancel{\left(\pi^2 - t^2 \right) \frac{\sin nt}{n}} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (+2t) \frac{\sin nt}{n} dt \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-t \frac{\cos nt}{n^2} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cancel{\frac{\cos nt}{n^2} dt} \right] \\ &= -\frac{4}{n^2} (-)^n \end{aligned}$$

Pertanto
$$S(t) = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^2} \cos nt.$$

Poiché $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$, possiamo sicuramente

concludere che la serie converge alla funzione nel
senso dell'energia, ossia che $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0$,
dove

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt.$$

Inoltre, considerando il periodo $[-\pi, \pi]$, possiamo sud-
dividerlo nei due sottointervalli $[-\pi, 0]$ e $[0, \pi]$, in
ciascuno dei quali f è monotona. Poiché, inoltre, f
è continua $\forall t \in [-\pi, \pi]$, dal II Teorema di con-
vergenza puntuale, concludiamo che

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \quad S(t) = f(t).$$

In fine, f è di classe C^1 a tratti e quindi la serie converge alla funzione uniformemente in $[-\pi, \pi]$, ossia

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - S_N(t)| \right] = 0$$

Se scegliamo $t = 0$, dalla convergenza puntuale abbiamo

$$f(0) = S(0) \Rightarrow \pi^2 = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Analogamente, scegliendo $t = \pi$, otteniamo

$$f(\pi) = S(\pi) \Rightarrow 0 = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Infine, dall'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \cancel{b_n^2} \right]$$

abbiamo, tenendo conto anche della parità di f ,

$$\cancel{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2)^2 dt = \pi \left[\cancel{2} \frac{\cancel{8}^4}{9} \pi^4 + \cancel{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 + t^4 - 2t^2 \pi^2) dt = \frac{4}{9} \pi^5 + 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\left[\pi^4 t + \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3} t^3 \pi^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{4}{9} \pi^5 = 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\pi^5 \left[1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right] = 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{\pi^4}{8} \frac{45+9-30-20}{45} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\textcircled{2} \quad y''' - 4y' = 16x$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^3 - 4\lambda = 0$

$$\lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -2.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione è

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + y_p$$

dove C_1, C_2, C_3 sono costanti arbitrarie e y_p è un integrale particolare dell'equazione completa.

Poiché il termine $16x$ è un polinomio di I grado e l'ordine minimo di derivazione è uno, concludiamo che y_p è un polinomio di II grado, ossia

$$y_p = Ax^2 + Bx$$

con A e B da determinare (è inutile aggiungere il

termine di grado zero, perché già conteggiato in C_1).

Abbiamo

$$y_p = Ax^2 + Bx, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A, \quad y_p''' = 0.$$

Sostituendo, ricaviamo

$$-4(2Ax + B) = 16x$$

$$-8Ax - 4B = 16x$$

da cui

$$A = -2, \quad B = 0.$$

Pertanto, l'integrale generale è

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} - 2x^2,$$

da cui

$$y' = 2C_2 e^{2x} - 2C_3 e^{-2x} - 4x,$$

$$y'' = 4C_2 e^{2x} + 4C_3 e^{-2x} - 4.$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 5 \\ 2C_2 - 2C_3 = 0 \\ 4C_2 + 4C_3 = \alpha + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 5 - 2C_2 \\ C_2 = C_3 \\ 8C_2 = \alpha + 4 \end{cases}$$

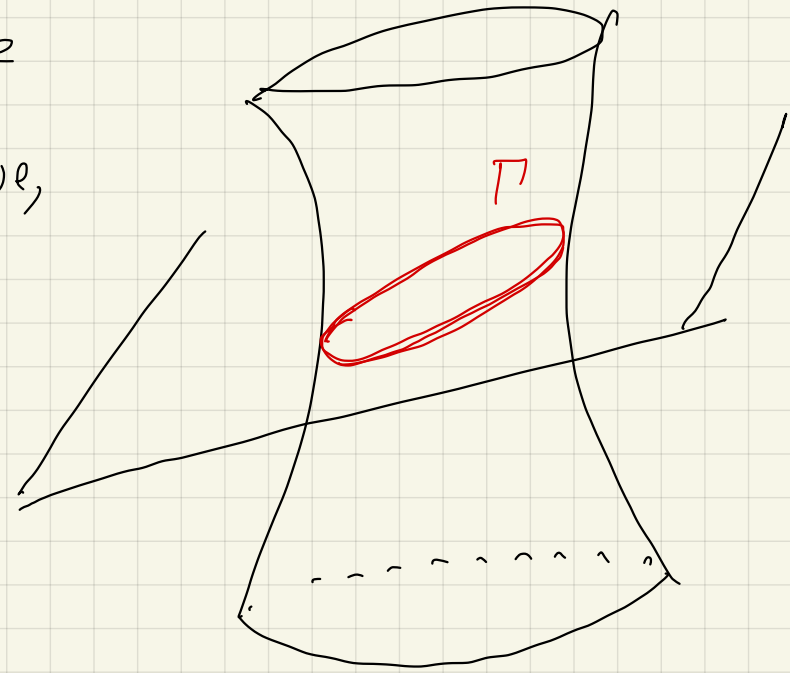
$$\begin{cases} C_1 = 5 - \frac{\alpha + 4}{4} \\ C_2 = \frac{\alpha + 4}{8} \\ C_3 = \frac{\alpha + 4}{8} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{16 - \alpha}{4} + \frac{\alpha + 4}{4} \cosh 2x - 2x^2$$

È chiaro che se $\alpha = -4$, otteniamo $y = 5 - 2x^2$ che è la soluzione polinomiale richiesta

③ Data la curva Γ definita da $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$, indicato con $P = P(x, y, z)$ il generico punto di Γ , si tratta di determinare i punti di massimo e di minimo

della distanza al quadrato di P dall'origine, ossia
 $d^2(P, 0) = x^2 + y^2 + z^2$, soggetti al vincolo che $P \in \Gamma$.

Osserviamo che Γ è l'intersezione di un paraboloide ad una falda con un piano, come nella figura a fianco ed è, dunque, un insieme chiuso e limitato.



Poiché d^2 è chiaramente una funzione continua su $\mathbb{R}^3$ e, di conseguenza, anche su Γ , per il Teorema di Weierstrass, il massimo ed il minimo cercati esistono sicuramente. Possiamo utilizzare il Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange.

Abbiamo

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + \mu(x - y - 2z)$$

Applicando la condizione necessaria, abbiamo

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ \mathcal{L}_z = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\mu = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ 2y + 2\lambda y - \mu = 0 \\ 2z - 2\lambda z - 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} \mu = 2y(1 + \lambda) \\ 2(x + y)(1 + \lambda) = 0 \\ z(1 - \lambda) - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Pertanto, abbiamo due sistemi

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} y = -x \\ \mu = 2y(1+\lambda) \\ z(1-\lambda) - \mu = 0 \\ x = z \\ \cancel{x^2 + x^2 - z^2 - 1 = 0} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 0 \\ z = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 0 \\ z = 0 \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ \lambda = -3 \\ \mu = 4 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ \lambda = -3 \\ \mu = -4 \end{cases}$$

Osserviamo, inoltre, che

$$d^2(\pm 1, \mp 1, \pm 1) = 3$$

e

$$d^2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1.$$

Pertanto,

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{e} \quad B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

punti a minima
distanze

$$C(1, -1, 1) \quad \text{e} \quad D(-1, 1, -1)$$

punti a massi-
ma distanza

④ Osserviamo che $f = e^{3xy} + 5x^2 + 2y - 1$
è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$f(0,0) = 1 - 1 = 0$$

$$f_x = 3y e^{3xy} + 10x$$

$$f_x(0,0) = 0$$

$$f_y = 3x e^{3xy} + 2$$

$$f_y(0,0) = 2 \neq 0$$

Pertanto tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono

verificate e concludiamo che l'equazione $f(x, y) = 0$ è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno di $(0, 0)$. Abbiamo, dunque $y = g(x)$ con $g: \underset{x=0}{I} \rightarrow \underset{y=0}{J}$ di classe C^∞ t.c.

$$g(0) = 0, \quad \text{e} \quad \forall x \in \underset{x=0}{I} \quad f(x, g(x)) \equiv 0.$$

$$\text{Inoltre} \quad g'(0) = - \frac{f_x(0, 0)}{f_y(0, 0)} = 0.$$

$$\text{Da } f(x, g(x)) = 0 \quad \text{abbiamo} \quad \forall x \in \underset{x=0}{I}$$

$$e^{3xg(x)} + 5x^2 + 2g(x) - 1 \equiv 0$$

da cui anche

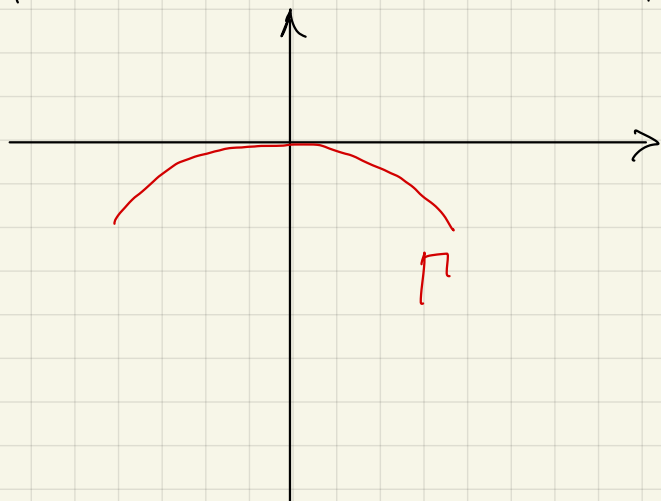
$$(3g + 3xg')e^{3xg} + 10x + 2g' \equiv 0$$

$$[(3g + 3xg')^2 + (3g' + 3g' + 3xg'')]e^{3xg} + 10 + 2g'' \equiv 0$$

Tenendo conto che $x=0$, $g(0)=0$, $g'(0)=0$,
otteniamo

$$10 + 2g''(0) = 0 \Rightarrow g''(0) = -5 < 0$$

Il grafico qualitativo è, dunque, quello in figura



$$\textcircled{5} \quad \phi(y) = \int_{-1}^1 [(y'(x))^2 - 1]^2 dx$$

Quindi

$$F(x, y, y') = [(y')^2 - 1]^2$$

Ricaviamo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y'} &= 2[(y')^2 - 1] \cdot 2y' \\ &= 4[(y')^3 - y']\end{aligned}$$

Pertanto, l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

si riduce a

$$\frac{d}{dx} 4[(y')^3 - y'] = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(y')^2 y'' - y'' = 0$$

ossia

$$y'' [3(y')^2 - 1] = 0$$

da cui ricaviamo

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = Ax + B$$

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Se imponiamo le condizioni al contorno

$$y(-1) = -1 \quad \text{e} \quad y(1) = 1$$

ricaviamo che l'unica soluzione, ossia l'estremale cercata
è
$$\bar{y} = x.$$

È immediato verificare che la semplice condizione
sufficiente non funziona.

Tuttavia, qualunque sia $y \in C^2([-1, 1])$ t.c. $y(-1) = -1$
e $y(1) = 1$, abbiamo $\phi(y) \geq 0$, essendo
l'integrale di una $F(x, y, y') \geq 0$. Inoltre,
per la nostra estremale, è $\bar{y}' = +1$ e
$$F(x, \bar{y}, \bar{y}') = 0 \implies \phi(\bar{y}) = 0$$

Poiché, dunque,

$\forall y$ ammissibile

$$\phi(y) \geq 0$$

e

$$\phi(\bar{y}) = 0,$$

concludiamo che $\bar{y}$ è estremo di minimo, in questo caso addirittura assoluto.