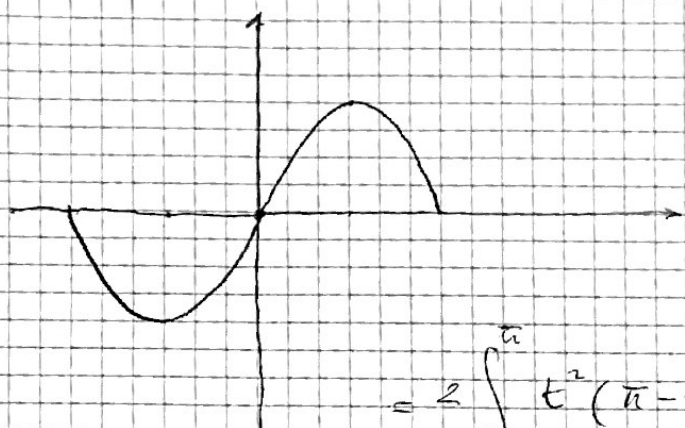


① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, dispari,
 $f(t) = t(\pi - t) \quad t \in [0, \pi]$



Osserviamo che $f \in L^2(-\pi, \pi)$

Infatti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} t^2 (\pi - t)^2 dt < +\infty$$

in quanto è l'integrale di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, f è sviluppabile in serie di Fourier

Poiché f è dispari, $a_0 = a_n = 0$.
 Inoltre

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t(\pi - t) \sin nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\cancel{t(\pi - t) \frac{\cos nt}{n}} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (\pi - 2t) \frac{\cos nt}{n} \, dt \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\cancel{(\pi - 2t) \frac{\sin nt}{n^2}} \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n^2} \, dt \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n^3} \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi} \frac{(-)^n - 1}{n^3}$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-)^n}{n^3}$$

Osserviamo che se

$$n = 2k$$

$$b_{2k} = \frac{4}{\pi} \frac{1 - 1}{(2k)^3} = 0$$

$$n = 2k+1$$

$$b_{2k+1} = \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^3}$$

Pertanto

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)t$$

Poiché in ogni punto $t \in [-\pi, \pi]$ f è continua e derivabile, possiamo concludere che

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \quad S(t) = f(t), \quad \text{ossia}$$

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}$$

Dall'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}^2$$

$$2 \int_0^{\pi} t^2 (\pi-t)^2 dt = \pi \frac{64}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$$

$$\int_0^{\pi} (\pi^2 t^2 - 2\pi t^3 + t^4) dt = \frac{32}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi}{32} \left[\frac{\pi^2 t^3}{3} - \frac{2\pi t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{32} \left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{2\pi^5}{4} + \frac{\pi^5}{5} \right)$$

$$= \frac{\pi^6}{32} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{\pi^6}{32} \frac{10 - 15 + 6}{30} = \frac{\pi^6}{960}$$

Dai risultati della convergenza puntuale, per $t = \pi/2$ abbiamo

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$(2) \quad y'' + 4y' + 8y = e^{2x}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = -4$$

$$\lambda = -2 \pm 2i$$

$$y = e^{-2x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + y_p$$

$$y_p = \Delta e^{2x}$$

$$y_p' = 2\Delta e^{2x}$$

$$y_p'' = 4\Delta e^{2x}$$

Dunque, sostituendo

$$4\Delta e^{2x} + 8\Delta e^{2x} + 8\Delta e^{2x} = e^{2x}$$

$$20\Delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{20}$$

L'integrale generale è, dunque

$$y = e^{-2x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + \frac{1}{20} e^{2x}$$

da cui

$$y' = -2e^{-2x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + e^{-2x} [-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x] + \frac{1}{10} e^{2x}$$

Sostituendo

$$y(0) = C_1 + \frac{1}{20}$$

$$y'(0) = -2C_1 + 2C_2 + \frac{1}{10}$$

$$y(\pi/4) = e^{-\pi/2} [C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{20} e^{\pi/2}$$

Pertanto otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{20} + \lambda(-2C_1 + 2C_2 + \frac{1}{10}) = 0 \\ e^{-\pi/2} C_2 + \frac{1}{20} e^{\pi/2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2\lambda)C_1 + 2\lambda C_2 = -\frac{1}{10}(\lambda + \frac{1}{2}) \\ C_2 = -\frac{1}{20} e^{\pi} \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-2\lambda$$

Pertanto, se $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\Delta(\lambda) \neq 0$ ed esiste una unica soluzione,

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{1}{20} e^{\pi} \\ C_1 = \left[-\frac{1}{10}(\lambda + \frac{1}{2}) + \frac{\lambda}{10} e^{\pi} \right] (1-2\lambda)^{-1} \end{cases}$$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, abbiamo

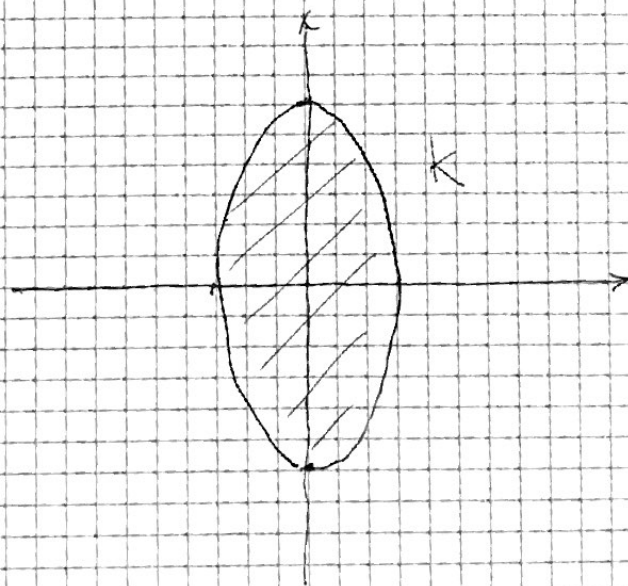
$$\begin{cases} C_2 = -\frac{1}{10} \\ C_2 = -\frac{1}{20} e^{\pi} \end{cases}$$

e il sistema è chiaramente impossibile, ossia non esistono soluzioni.

③ $f = 4x^2 + y^2 + y - 2x$

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 \leq 1 \right\}$$

Poiché f è di classe C^∞ , possiamo applicare CN e CS per determinare eventuali punti di massimo e/o minimo interni.



$$CN \quad \nabla f = 0$$

$$\begin{cases} 8x - 2 = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

Il punto è interno a K .

$$CS \quad H_f = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

Poiché $H_f > 0$, il punto è di minimo. Osserviamo che

$$f\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Studiamo ora il comportamento sul bordo.

Osserviamo che

$$\partial K : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Inoltre

$$f|_{\partial K} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cos^2 t + \sin^2 t + \sin t - \frac{1}{2} 2 \cos t$$

$$= 1 + \sin t - \cos t$$

$$= 1 + \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right]$$

$$= 1 + \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Poiché $\sin s$ è periodica di periodo 2π e massimo e minimo sono rispettivamente $+1$ e -1 , abbiamo

$$M_{\partial K} = 1 + \sqrt{2}$$

$$m_{\partial K} = 1 - \sqrt{2}$$

Pertanto

$$M_{\text{ass}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$m_{\text{ass}} = \min \left\{ 1 - \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right\} = -\frac{1}{2}$$

$$④ \quad f = 3x^2 + y^2 + z^2 - 3e^{xyz}$$

Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Inoltre

$$f_x = 6x - 3yz e^{xyz}$$

$$f(1,0,0) = 3 + 0 + 0 - 3 \cdot e^0 = 3 - 3 = 0$$

$$f_x(1,0,0) = 6 - 3 \cdot 0 \cdot 0 = 6 \neq 0$$

Pertanto, possiamo applicare il Teorema di Dini e concludere che f è univocamente risolubile rispetto a x in un intorno di $P(1,0,0)$.

L'equazione del piano tangente è

$$f_x(1,0,0)(x-1) + f_y(1,0,0)y + f_z(1,0,0)z = 0$$

$$f_y = 2y - 3xz e^{xyz}$$

$$f_y(1,0,0) = 0$$

$$f_z = 2z - 3xy e^{xyz}$$

$$f_z(1,0,0) = 0$$

Dunque

$$\pi_{tg}: \quad x = 1$$

Se indichiamo con $x = g(y,z)$ la funzione implicitamente definita da $f = 0$, il risultato precedente ci dà che

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0) = 0$$

Per capire se il piano tangente attraversa o no la superficie Σ , occorre calcolare le derivate seconde. Osserviamo che abbiamo

$$3[g(y,z)]^2 + y^2 + z^2 - 3e^{g(y,z)yz} = 0$$

$$6g \cdot g_y + 2y - 3e^{yzg(y,z)} [zg + yzg_y] = 0$$

$$6g g_z + 2z - 3e^{yzg(y,z)} [yg + yzg_z] = 0$$

ed anche

$$6[g_y]^2 + 6g g_{yy} + 2 - 3e^{yzg} [zg + yzg_y]^2 + \\ - 3e^{yzg} [zg_y + zg_y + yzg_{yy}] = 0$$

$$6[g_z]^2 + 6g g_{zz} + 2 - 3e^{yzg} [yg + yzg_z]^2 - \\ - 3e^{yzg} [yg_z + yg_z + yzg_{zz}] = 0$$

$$6g_z g_y + 6g g_{yz} - 3e^{yzg} [yg + yzg_z][zg + yzg_y] - \\ - 3e^{yzg} [g + zg_z + yg_y + yzg_{yz}] = 0$$

Sostituendo e tenendo conto dei risultati precedenti, abbiamo

$$6g_{yy}(0,0) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{yy}(0,0) = -\frac{1}{3}$$

$$6g_{zz}(0,0) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{zz}(0,0) = -\frac{1}{3}$$

$$6g_{yz}(0,0) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{yz} = \frac{1}{2}$$

[Ricordiamo che

$$\begin{aligned} g(0,0) &= 1 \\ g_y(0,0) &= 0 \\ g_z(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

Pertanto

$$H_g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ che \u00e8 indefinito.}$$

Perch\u00e9 $(y=0, z=0)$ \u00e8 punto di sella e la superficie attraversa il piano tg di equazione $x=1$.